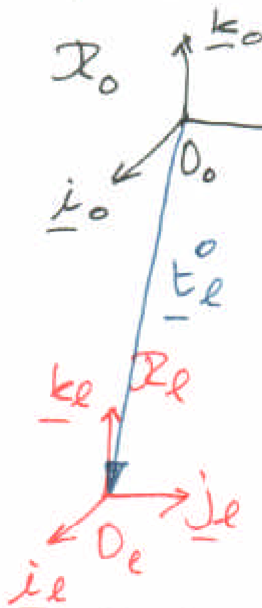
Lezione 03/03/2004
Testo pagg. 19 e segg.

a) Rappresentazione di traslazioni
b) Rappresentazione di rotazioni
c) Vettori omogenei
d) Roto-traslazioni
e) Rotazioni elementari
f) Composizione di rotazioni

ROTOTRASLAZIONI

- COSA SONO
- COME SI "SOMMANO"/COMPONGONO
- CHE SIGNIFICATO HANNO
- DOVE SERVONO

TRASLAZIONI



$\mathcal{R}_0(O_0, \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)$

VERSORI = VETTORI $\|\cdot\| = 1$

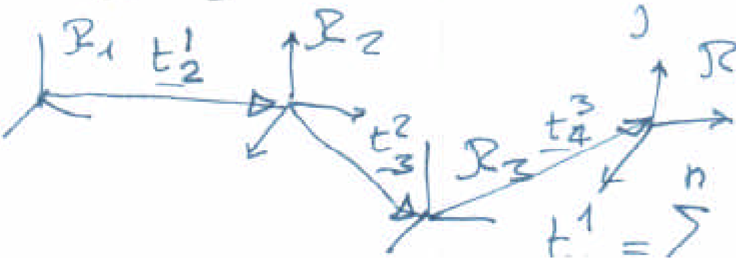
$$\|\underline{i}_0\| = 1 = \|\underline{j}_0\| = \|\underline{k}_0\|$$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \qquad \|\underline{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} \underline{v}_i^2}$$

le traslazioni si rappresentano con vettori di traslazione $\left[\underline{t}^0_e\right]_{\mathcal{R}_0}$

$$\left[\underline{t}^0_e\right]_{\mathcal{R}_e} \overset{?}{=} \left[\underline{t}^0_e\right]_{\mathcal{R}_0} \neq \left[\underline{t}^0_e\right]_{\mathcal{R}_{qualsiasi}}$$

$$\left[\underline{t}^e_0\right] = \text{traslazione inversa} = -\underline{t}^0_e$$



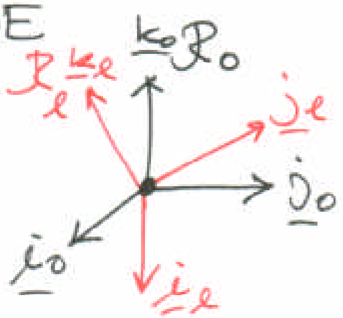
$$\underline{t}^1 = \sum^{n} \underline{t}^i_{i+1}$$

le traslazioni si compongono **sommandole** (2)

l'ordine di esecuzione è indifferente

- 3 MAR. 2004

ROTAZIONE



$$\underbrace{[\underline{i}_e]_{\mathcal{R}_0} \quad [\underline{j}_e]_{\mathcal{R}_0} \quad [\underline{k}_e]_{\mathcal{R}_0}}$$

MATRICE DI ROTAZIONE →

$$\underbrace{\begin{bmatrix} [\underline{i}_e]_{\mathcal{R}_0} & [\underline{j}_e]_{\mathcal{R}_0} & [\underline{k}_e]_{\mathcal{R}_0} \end{bmatrix}_{3\times 3}}_{\text{matrice ortonormale}} = R^0_e$$

R^0_e rappresenta la rotazione da 0 a e

è data dai versori e rappresentati in 0

$$R^0_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R^e_e$$

$[\underline{i}_0]_{\mathcal{R}_0}$

R : è orto-normale

$$\det R = \pm 1 \begin{cases} +1 & \text{se } R \text{ è una rotazione} \\ -1 & \text{se } R \text{ è una rotoriflessione} \end{cases}$$

$$RR^T = R^TR = I \Rightarrow R^{-1} = R^T$$

l'operazione inversa è data dalla trasposta

$$R^1_n = R^1_2 \, R^2_3 \, R^3_4 \cdots R^{n-1}_n$$

l'ordine del prodotto è fondamentale!

PRE - FISSO

POST - MOBILE

USO DI VETTORI <u>OMOGENEI</u>

PER UNIFICARE ROTAZIONI & TRASLAZIONI

3 MAR. 2004

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Longrightarrow \tilde{\underline{v}} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda = 1} \qquad \tilde{\underline{v}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\underline{v}} \oplus \tilde{\underline{w}} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{UNO FISSO}$$

UNIFICARE ROT + TRASL IN UNA MATRICE (DI ROTOTRASLAZIONE) OMOGENEA

$$\underset{4\times4}{T_e^0} = \left[\begin{array}{c|c} \overset{3\times3}{R_e^0} & \underline{t}_e^0 \\ \hline 0 \;\; 0 \;\; 0 & 1 \end{array}\right] \leftarrow \text{FISSI}$$

ROTAZIONI ELEMENTARI

5

- 3 MAR. 2004

Rotazione di α intorno a $\underline{i}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} = R(\underline{i}, \alpha)$$

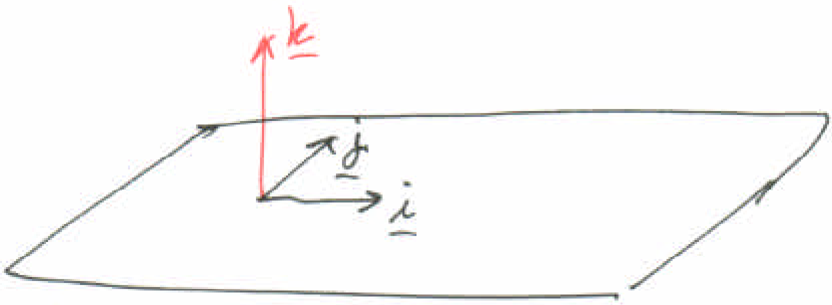
$\beta, \underline{j}$

$$\begin{bmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{bmatrix} = R(\underline{j}, \beta)$$

$\gamma, \underline{k}$

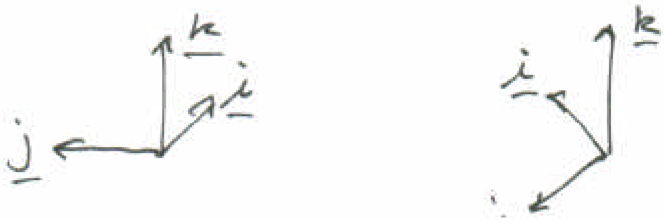
$$\begin{bmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R(\underline{k}, \gamma)$$

Rotazione planare



Esempio

$R(\underline{k}, 90°)$ poi $R(k, 45°)$



- 3 MAR. 2004

$$R(k,90)\,R(\underline{k},45) = R(k,135) =$$
$$= R(k,45)\,R(k,90)$$

ROTAZIONI PLANARI (2 DIM) SI SOMMANO (E QUINDI COMMUTANO)

$$R(\underline{v},\alpha_1)\,R(\underline{v},\alpha_2) =$$
$$R(\underline{v},(\alpha_1+\alpha_2))$$

$$R(\underline{v},\alpha)$$

ESEMPIO

a) Rotazione intorno a x di $-90°$

seguita da

b) Rotazione intorno a z di $+90°$

prima z fisso poi z mobile

$$R_a = Rot(\underline{i},-90°) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_b = Rot(\underline{k},90°) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- 3 MAR. 2004

ES 1 PRE-FISSO

$$R_b R_a = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\xleftrightarrow{\qquad = \qquad} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

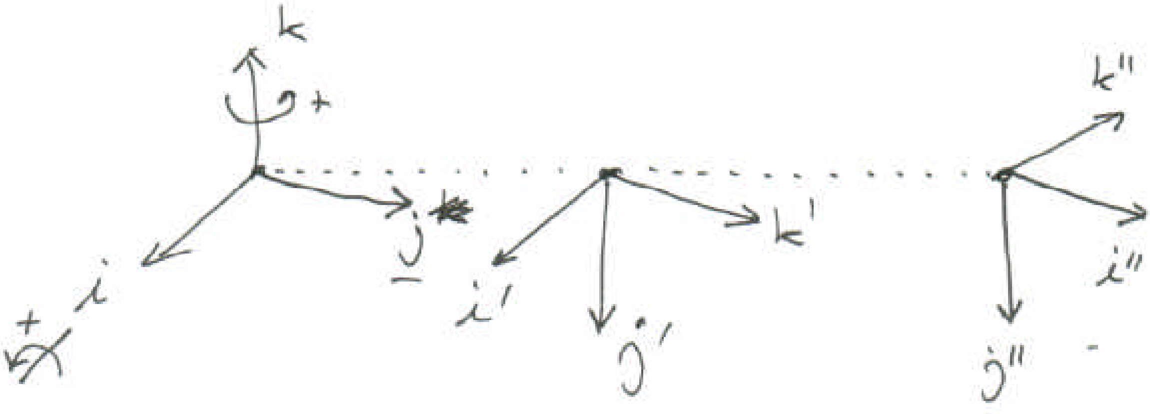
NON È UNA ROT ELEMENTARE!

ES 2 POST-MOBILE

$$R_a R_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ES 1 (PRE-FISSO)



Rappresentiamo $\mathcal{R}''$ in $\mathcal{R}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{ccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ i'' & j'' & k'' \end{array}$$