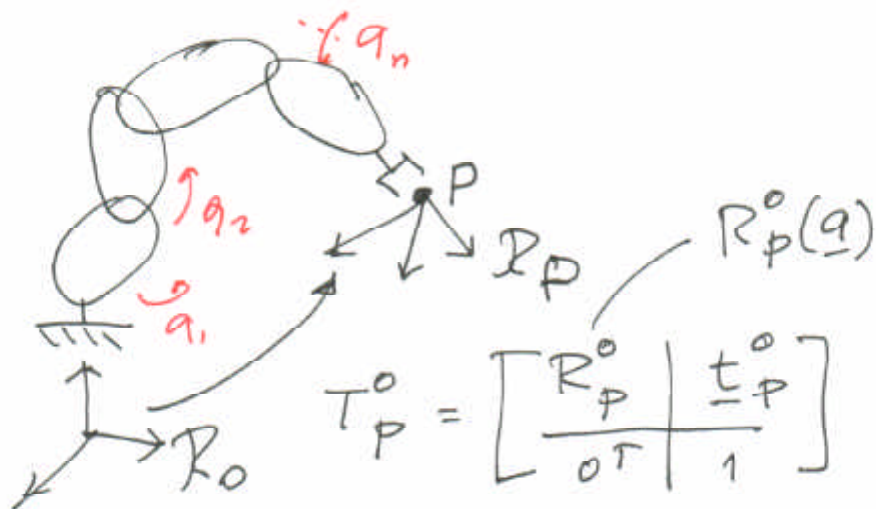


Lezione 09/03/2004

- a) Jacobiano analitico e geometrico: testo pagg. 90-92
- b) Trasformazioni tra velocità angolari: testo pagg. 78-80
- c) Matrici antisimmetriche, derivate di matrici di rotazione e formula della velocità: testo pagg. 64-67

1

- 9 MAR. 2004



funz. cin. dir. posizione del punto P

$$\begin{bmatrix} \underline{\alpha} \\ \underline{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_P^0(q) = f_L(q) \\ \text{---} \\ \text{estraiamao da } R_P^0 \text{ gli angoli} \\ \text{desiderati} \\ f_a(q) \end{bmatrix}$$

$\underline{q} = ?$ FUNZ. CIN. INV. POSIZIONE
COMPLESSA DA RICOAVARE

$$\begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} = ?$$

- 9 MAR. 2004

(2)

$$\dot{\underline{x}} = \underline{J}_L(\underline{q}) \dot{\underline{q}}$$

$\begin{matrix} 3 \times 1 & \uparrow & 6 \times 1 \end{matrix}$
 JACOBIANO "LINEARE"

$$\underline{J}_L = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_L(\underline{q})_i}{\partial q_j} \end{bmatrix}$$

$\begin{matrix} i \\ 3 \times 6 \end{matrix}$

$$\dot{\underline{\alpha}} = \underline{J}_A(\underline{q}) \dot{\underline{q}}$$

JACOBIANO "ANGOLARE"
 $\underline{J}_A(\underline{q}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_A(\underline{q})_i}{\partial q_j} \end{bmatrix}$

$\begin{matrix} 3 \times 6 \\ \text{JACOBIANO ANGOLARE} \end{matrix}$

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} \alpha \\ \vdots \\ \alpha_E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ \vdots \\ \phi \\ \theta \\ \psi \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{\underline{p}} = \begin{bmatrix} \dot{p}_x = v_x \\ \dot{p}_y = v_y \\ \dot{p}_z = v_z \\ \vdots \\ \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

EULERO

domanda: che relazione esiste tra

$$\|\underline{\omega}\| = \dot{\theta}$$

$$\dot{\underline{\alpha}}_E = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \stackrel{?}{\iff} \underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$



-9 MAR. 2004

(3)

$$\underline{\omega}(t) = M_E(t) \underline{\omega}_E(t) = M_E(t) \underline{\alpha}_E(t)$$

3x3

$$M_E(t) = \begin{bmatrix} 0 & \cos \phi(t) & \sin \phi(t) \sin \theta(t) \\ 0 & \sin \phi(t) & -\cos \phi(t) \sin \theta(t) \\ 1 & 0 & \cos \theta(t) \end{bmatrix}$$

velocità "euleriana"

$$\phi = 90^\circ \quad \theta = 0^\circ \quad \text{NON INVERTIBILE !!}$$

$$\underline{\omega}_E(t) = M_E^{-1}(t) \underline{\omega}(t)$$

$$\underline{\omega}(t) = M_{RPY}(t) \underline{\omega}_{RPY}(t) \quad \text{allo stesso modo}$$

$$M_{RPY}(t) = \begin{bmatrix} \cos \theta_z \cdot \cos \theta_y & -\sin \theta_z & 0 \\ \sin \theta_z \cdot \cos \theta_y & \cos \theta_z & 0 \\ -\sin \theta_y & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

SE θ_z e θ_y sono piccoli

$$M_{RPY}(t) \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\omega}_{RPY} \approx \underline{\omega}$$

Canonico

$$\underline{\omega}(t) = J_A(t) \dot{\underline{q}} = \begin{bmatrix} \overset{1}{\boxed{}} & \overset{2}{\boxed{}} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

3×6

6×1

④

- 9 MAR. 2004

Jacobiano geometrico

$$J_A(\dot{\underline{q}}) = \overset{1}{\boxed{}} \cdot + \overset{2}{\boxed{}} \cdot + \dots + \overset{6}{\boxed{}} \cdot = \overbrace{J_{A1} \dot{q}_1 + J_{A2} \dot{q}_2 + \dots + J_{A6} \dot{q}_6}^{\underline{\omega}_1(t)}$$

$= \underline{\omega}(t)$

$$\underline{\omega}_i(t) = J_{Ai} \dot{q}_i(t)$$

rotazione di modulo $\dot{q}_i$ intorno ad un asse.

	J_{Ai}	J_{Li}
GIUNTO PRISMATICO	$\underline{0}$	$\underline{k}_{i-1}$
(i) ROTOIDALE	$\underline{k}_{i-1}$	$\underline{k}_{i-1} \times \underline{r}_{i-1,P}$

$\mathcal{R}_0$

$$\underline{v} = \underline{\dot{x}} = J_{L1} \dot{q}_1 + J_{L2} \dot{q}_2 + \dots + J_{L6} \dot{q}_6$$

$$\underline{k}_{i-1}(\underline{q}(t))$$

$\underline{r}_{i-1,P}$ vettore dall'origine del $\mathcal{R}_{i-1}$ alla punta operativa

VELOCITA' ANGOLARI, MATRICI
ANTISIMMETRICHE
PRODOTTI ESTERNI

(5)

- 9 MAR. 2004

MATRICE ANTISIMMETRICA VALE SOLO IN $\mathbb{R}^3$

$$S = -S^T \quad ; \quad S + S^T = 0$$

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -v_z & v_y \\ v_z & 0 & -v_x \\ -v_y & v_x & 0 \end{bmatrix}$$

3 elementi
solo 3 sono
indipendenti

$$S = S(\underline{v})$$

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix}$$

dato $\underline{v}$ calcolare S

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} \pi \\ -e \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$S(\underline{v}) = \begin{bmatrix} 0 & -12 & -e \\ 12 & 0 & -\pi \\ e & \pi & 0 \end{bmatrix}$$

dato S calcolare $\underline{v}$

$$\begin{bmatrix} 0 & \lg 2 & \frac{1}{3} \\ -\lg 2 & 0 & -12 \\ -\frac{1}{3} & 12 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \underline{v} = \begin{bmatrix} 12 \\ 1/3 \\ -\lg 2 \end{bmatrix}$$

(6)

- 9 MAR. 2004

 $S(\underline{v}) \equiv \text{operatore } \underline{v} \times$

$\uparrow$
 PRODOTTO ESTERNO
 SINTAGMA ITALIANO $\wedge$
 " INGLESE $\times$

CROSS PRODUCT

$$\underline{a} \times \underline{b} \quad \det \begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$$

$$S(\underline{a})\underline{b} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{a} \times \underline{b} = -\underline{b} \times \underline{a} \Leftrightarrow S(\underline{a})\underline{b} = -S(\underline{b})\underline{a} = S(\underline{b})\underline{a}$$

$$R(\underline{v} \times \underline{u}) = R\underline{v} \times R\underline{u}$$

$$R S(\underline{v}) R^T = S(R\underline{v})$$

MATRICA DI ROTAZIONE...

$$R R^T = I \quad R(x)$$



- 9 MAR. 2004

$$\frac{dR(x)}{dx} R^T(x) + R(x) \frac{dR^T(x)}{dx} = 0$$

$$(ABCD)^T = D^T C^T B^T A^T$$

$$\left(\frac{dR}{dx} \cdot R^T \right)^T = R \frac{dR^T}{dx}$$

$$S + S^T = 0 \quad \text{dove}$$

$$S \equiv \frac{dR(x)}{dx} R^T(x)$$

$\Downarrow$

$$S(\cdot) R(x) = \frac{dR(x)}{dx}$$

$$x \equiv t$$

$$\frac{dR(t)}{dt} \equiv \dot{R}(t) = S(\underline{\omega}(t)) R(t)$$

$$R(\underline{u}, \theta) = e^{S(\underline{u}, \theta)}$$

↑
asse
rotazione

↑
angolo
di rotazione

(8)

- 9 MAR. 2004

dati $\underline{u}$ e θ che
relazione c'è con $\underline{\omega}$?

$$\underline{R}(t) = I + \frac{\sin \theta(t)}{\theta(t)} \underline{\dot{u}}(t) S(\underline{u}) + \frac{1 - \cos \theta(t)}{\theta^2} S^2(\underline{u})$$

$$\underline{u} \rightarrow \|\underline{u}\| = 1$$

$$\underline{v} \rightarrow \|\underline{v}\| = \theta$$

$$\underline{\omega} = \dot{\theta} \underline{u}(t) + \sin \theta \underline{\dot{u}}(t) + (1 - \cos \theta) S(\underline{u}) \underline{\dot{u}}$$

se $\underline{\dot{u}} = \underline{u} \times \underline{u}$

$\underline{\omega}$ è la derivata di un
vettore!