Lezione 12/03/2004

a) Equazioni di Lagrange: testo pagg. 112-120

Equazioni di Lagrange

C = energia cinetica (additiva)

$$C(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) \qquad \underline{q}, \underline{\dot{q}}$$

$\underline{\dot{q}}$ → VELOCITÀ

$\underline{q}$ → COORDINATE GENERALIZZATE

$\mathcal{P}$ = en. potenziale (additiva)

$$\mathcal{P}(\underline{q})$$

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) = C(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) - \mathcal{P}(\underline{q})$$

Eq. scalare

i-esima coord. gen.

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = \mathcal{F}_i$$

$\mathcal{F}_i$ = { Forze applicate dall' esterno
- forze ai gi
- forze alla punta

Forze di dissipazione }

$$\Downarrow$$

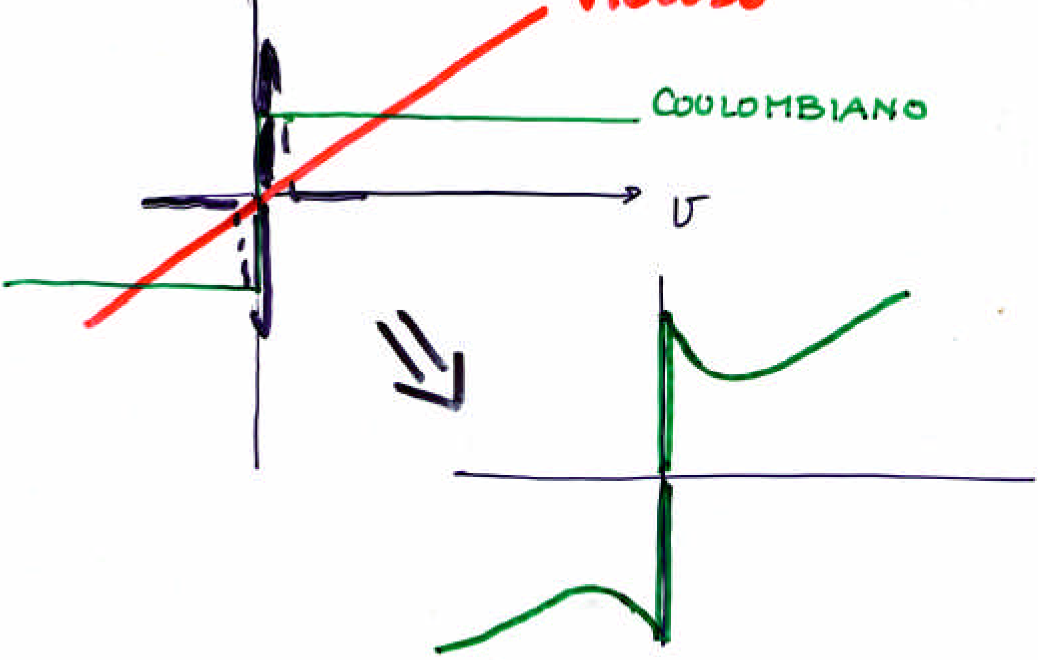
$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial C}{\partial \dot{q}_i}\right] - \frac{\partial C}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_i} = \mathcal{F}_i$$

$\Downarrow$ EVIDENZIAMO "ATTRITO"

$$\frac{d}{dt}\left[\quad\right] - \frac{\partial C}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_i} + f_{attrito,i} = \mathcal{F}'_i$$

$f_{attrito,i}$ → possono essere "generali"

12/03/04 (2)



CONSIDERANDO SOLO L'ATTRITO VISCOSO
POSSIAMO SCRIVERE

$$\frac{d}{dt}\left[\,\cdot\,\right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{P}}{\partial q_i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}_i} = \mathcal{Q}'_i \qquad \text{i-esima eq.}$$

$\mathcal{D}$ = funz. di dissipazione Reyleigh

En. Cinetica

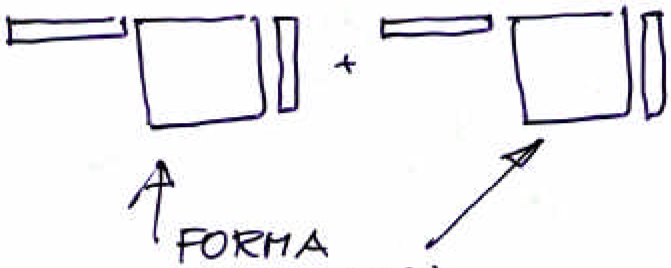
$$C = \sum_i C_i$$

vel. totale del c_i

$$C_i = \frac{1}{2}\left[m \| \underline{v}_{c_i} \|^2 + \underline{\omega}_i^T \Gamma_i \underline{\omega}_i \right]$$

vel. angolare totale del braccio b_i

$$= \frac{1}{2}\left[\underline{v}_{c_i}^T \underbrace{mI}_{3\times 3} \underline{v}_{c_i} + \underline{\omega}_i^T \Gamma_i \underline{\omega}_i \right]$$



FORMA QUADRATICA

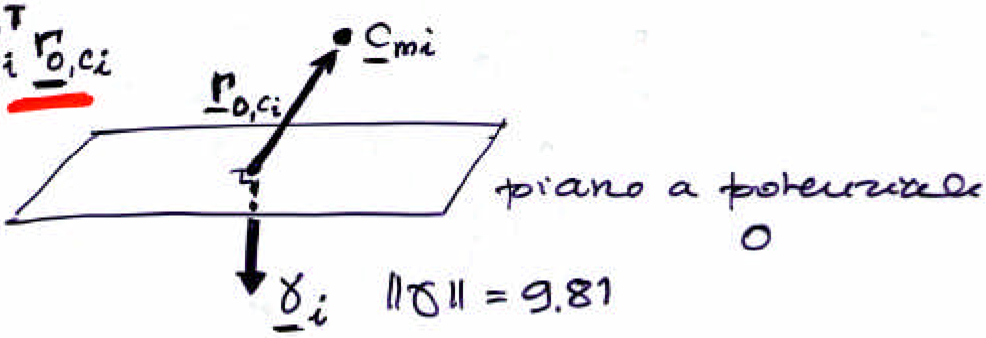
$C_i(\underline{q}, \underline{\dot q}) = ?$ $\underline{q}, \underline{\dot q}$ dove stanno?

$v_{ci}(\underline{q}, \underline{\dot q})$ $\omega_i(\underline{q}, \underline{\dot q})$

En. Potenziale → Energia di posiz dovuta al campo gravitazionale

→ Energia elastica: NO! corpi rigidi

$$\mathcal{P}_i = -m_i \underline{\gamma}_i^T \underline{r}_{0,c_i}$$



12/03/04 ④

$C = \sum C_i$

$\mathcal{C} = \sum \mathcal{C}_i$

$\mathcal{T}_i' = \longrightarrow \quad \mathcal{T}_i' = \tau_{ci} + \tau_{ei}$

coppia applicata dall'ambiente

i-esima coppia di comando fornita dall'attuatore i

τ_{ci} = ha un modello "dietro" che dipende dal motore

$\tau_{ei} = J^{+} F_e$

$\Downarrow$

... pagg. 116 ÷ 120

---

i-esima equazione (5.54)

$$\sum_j^6 H_{ij}(\underline{q})\ddot{q}_j + \sum_j^6 \sum_k^6 h_{ijk}(\underline{q})\dot{q}_j \dot{q}_k + g_i(\underline{q}) = \tau_i$$

$$\tau_i = \tau_{ci} + \tau_{ei}$$

$$\Downarrow$$

$$\overbrace{H_{ii}(\underline{q})\ddot{q}_i}^{1} + \overbrace{\sum_{j \neq i} H_{ij}(\underline{q})\ddot{q}_j}^{2} + \overbrace{\sum_j h_{ijj}(\underline{q})\dot{q}_j^2}^{3} +$$

$$+ \underbrace{\sum_j \sum_{k \neq j} h_{ijk}(q)\dot{q}_k \dot{q}_j}_{4} + \underbrace{g_i(\underline{q})}_{5} = \tau_i$$

12/03/04

1: effetto locale dell'inerzia : "massa equivalente" × accelerazione

2: effetto delle inerzie trasmesse dagli altri giunti

3: effetti equivalenti delle forze centrifughe

4: effetti equivalenti delle forze di CORIOLIS

5: effetti equivalenti delle forze gravitazionali

$\Downarrow$ ESPRESSIONE MATRICIALE

$$\boxed{H(\underline{q})\,\ddot{\underline{q}}(t) + C(\underline{q},\dot{\underline{q}})\,\dot{\underline{q}}(t) + \underline{g}(\underline{q}) = \underline{\tau}}$$

$H(\underline{q})$ matrice d'inerzia del robot

$n \times n \rightarrow 6 \times 6$

$$\boxed{H}\,\overset{\ddot{q}}{[\;]} + \boxed{C}\,\overset{\dot{q}}{[\;]} + [\;] = [\;]$$

$C(\underline{q},\dot{\underline{q}})$ matrice dei termini $\begin{cases} \text{CORIOLIS} \\ \text{CENTRIFUGHI} \end{cases}$

MANCA L'ATTRITO ! E SE CI FOSSE ?

$$H(\underline{q})\ddot{\underline{q}} + C(\underline{q},\dot{\underline{q}})\dot{\underline{q}} + B\dot{\underline{q}} + \underline{g}(\underline{q}) = \underline{\tau}$$

12/03/04

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1 & & & 0 \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \beta_n \end{bmatrix}$$

ESEMPIO DI SISTEMA MECCANICO CANONICO

$$M\ddot{\underline{q}}(t) + B\dot{\underline{q}}(t) + K\underline{q}(t) = \underline{\tau}$$

MASSA

ATTRITO (SMORZATORE)

MOLLA