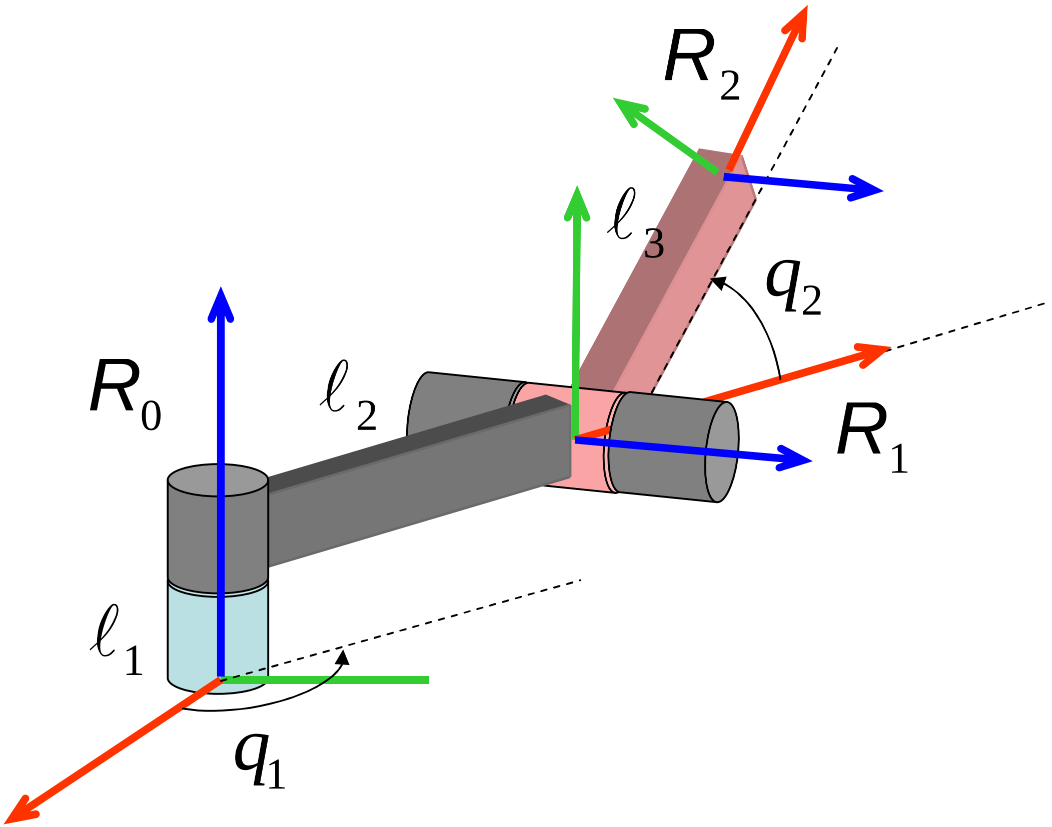

Il manipolatore ha due bracci
e due giunti rotoidali

Parametri di Denavit – Hartenberg

i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	ℓ_1	$q_1(t)$	ℓ_2	$\pi/2$
2	0	$q_2(t)$	ℓ_3	0

si calcolano le matrici di trasformazione omogenea utilizzando le relazioni (3.20) di pag. 87

$$\boldsymbol{T}_1^0 = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & s_1 & \ell_2 c_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 & \ell_2 s_1 \\ 0 & 1 & 0 & \ell_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{T}_2^1 = \begin{pmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & \ell_3 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & \ell_3 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{T}_1^0 \boldsymbol{T}_2^1 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & -c_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{matrix}}^{\,\boldsymbol{R}_2^0} & \boxed{\begin{matrix} \ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1 \\ \ell_3 s_1 c_2 + \ell_2 s_1 \\ \ell_3 s_2 + \ell_1 \end{matrix}}^{\,\boldsymbol{t}_2^0} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}$$

Equazioni cinematiche dirette di posizione

$$x(t) = \ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1$$

$$y(t) = \ell_3 s_1 c_2 + \ell_2 s_1$$

$$z(t) = \ell_3 s_2 + \ell_1$$

Eq. 1

$$\boldsymbol{R}_2^0 = \begin{pmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & -c_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\phi(t) = q_1(t)$$

$$\theta(t) = \pi/2$$

$$\psi(t) = q_2(t)$$

Angoli di Eulero ricavati utilizzando le relazioni (2.79) a pag. 52 del testo

Equazioni cinematiche inverse di posizione

Se conoscessimo gli angoli di Eulero non ci sarebbero difficoltà; supponiamo di non conoscerli
Iniziamo dal sistema:

$$x(t) = \ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1$$
$$y(t) = \ell_3 s_1 c_2 + \ell_2 s_1$$
$$z(t) = \ell_3 s_2 + \ell_1$$

$$s_2 = \frac{z - \ell_1}{\ell_3}$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1 \\ y(t) &= \ell_3 s_1 c_2 + \ell_2 s_1 \end{aligned}\right\}$$
$$z(t) = \ell_3 s_2 + \ell_1$$

Quadrando e sommando

$$x^2 + y^2 \equiv a^2 = (\ell_2 + \ell_3 c_2)^2$$

$$c_2 = \frac{a - \ell_2}{\ell_3}$$

Equazioni cinematiche inverse di posizione

$$s_2 = \frac{z - \ell_1}{\ell_3}$$

$$c_2 = \frac{a - \ell_2}{\ell_3}$$

$$\tan q_2 = \frac{s_2}{c_2} = \frac{z - \ell_1}{a - \ell_2}$$

$$x(t) = \left(\ell_3 c_2 + \ell_2\right) c_1$$

$$y(t) = \left(\ell_3 c_2 + \ell_2\right) s_1$$

$$c_1 = \frac{x(t)}{\left(\ell_3 c_2 + \ell_2\right)}$$

$$s_1 = \frac{y(t)}{\left(\ell_3 c_2 + \ell_2\right)}$$

$$\tan q_1 = \frac{s_1}{c_1} = \frac{y(t)}{\ell_3 c_2 + \ell_2} \frac{\ell_3 c_2 + \ell_2}{x(t)} = \frac{y(t)}{x(t)}$$

Equazioni cinematiche dirette di velocità

Velocità Lineari

$$\dot{x} = -\left(\ell_3 s_1 c_2 + \ell_2 s_1\right)\dot{q}_1 - \ell_3 c_1 s_2 \dot{q}_2$$

$$\dot{y} = \left(\ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1\right)\dot{q}_1 - \ell_3 s_1 s_2 \dot{q}_2$$

$$\dot{z} = \ell_3 c_2 \dot{q}_2$$

Velocità Angolari: approccio analitico

$$\left.\begin{aligned} \dot{\phi} &= \dot{q}_1 \\ \dot{\theta} &= 0 \\ \dot{\psi} &= \dot{q}_2 \end{aligned}\right\}$$

queste potremmo definirle velocità “euleriane” $\boldsymbol{\omega}_E = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$

Jacobiano **Analitico**

osservando le equazioni delle velocità, si ottiene facilmente

$$\boldsymbol{J}_L = \begin{pmatrix} -\ell_3 s_1 c_2 - \ell_2 s_1 & -\ell_3 c_1 s_2 \\ \ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1 & -\ell_3 s_1 s_2 \\ 0 & \ell_3 c_2 \end{pmatrix}$$

Eq. 2a

$$\boldsymbol{J}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eq. 2b

Trasformazione delle velocità “euleriane” in velocità cartesiane, applicando la matrice di trasformazione:

$$\boldsymbol{M}_E = \begin{pmatrix} 0 & \cos\phi & \sin\phi\sin\theta \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi\sin\theta \\ 1 & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & s_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{M}_E \boldsymbol{\omega}_E$$

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & s_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1\dot{q}_2 \\ -c_1\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

questa è la velocità angolare rappresentata nel riferimento cartesiano R_0

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} s_1\dot{q}_2 \\ -c_1\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{J}_A = \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & -c_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eq. 3

questo è lo Jacobiano angolare **Geometrico**.
Vediamo ora di ricavarlo per altra via

Jacobiano **Geometrico**

I giunti sono entrambi rotoidali, quindi si applicano le relazioni seguenti:

$$\boldsymbol{J}_{Ai} = \boldsymbol{k}_{i-1}$$

$$\boldsymbol{J}_{Li} = \boldsymbol{k}_{i-1} \times \boldsymbol{r}_{i-1,p}$$

calcoliamo prima lo Jacobiano angolare:

$$\boldsymbol{J}_{A1} = \boldsymbol{k}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \boldsymbol{J}_{A2} = \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{R}_1^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

queste due colonne sono uguali a quelle ricavate in Eq. 3

quindi calcoliamo lo Jacobiano lineare

$$\boldsymbol{r}_{0,p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}_{R_0}$$ che si ricava dalla cinematica diretta di posizione Eq. 1

$$\boldsymbol{J}_{L1} = \boldsymbol{k}_0 \times \boldsymbol{r}_{0,p} = \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{k}_0\right)\boldsymbol{r}_{0,p} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ell_3 s_1 c_2 - \ell_2 s_1 \\ \ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

poi calcoliamo

$$\boldsymbol{r}_{1,p} = \begin{pmatrix} \ell_3 c_2 \\ \ell_3 s_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

invece di trasformarlo subito in R_0 e poi eseguire il prodotto vettoriale, eseguiamo prima il prodotto vettoriale e poi trasformiamo il risultato in R_0

$$\boldsymbol{J}_{L2} = \boldsymbol{k}_0 \times \boldsymbol{r}_{1,p} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_3 c_2 \\ \ell_3 s_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ell_3 s_2 \\ \ell_3 c_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

ora trasformiamo da R_1 a R_0

$$\boldsymbol{J}_{L2}\Big|_{R_0} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ s_1 & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\ell_3 s_2 \\ \ell_3 c_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} -\ell_3 c_1 s_2 \\ -\ell_3 s_1 s_2 \\ \ell_3 c_2 \end{pmatrix}$$

e quindi possiamo scrivere

$$\boldsymbol{J}_L = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{L1} & \boldsymbol{J}_{L2} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -\ell_3 s_1 c_2 - \ell_2 s_1 & -\ell_3 c_1 s_2 \\ \ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1 & -\ell_3 s_1 s_2 \\ 0 & \ell_3 c_2 \end{pmatrix}}$$

che coincide con il risultato trovato in Eq. 2a

Possiamo quindi affermare che i risultati ottenuti sono identici, indipendentemente dalla strada seguita per ottenerli.

Riassumiamo qui di seguito i valori ottenuti

Jacobiano **Analitico**

$$\boldsymbol{J}_L = \begin{pmatrix} -\ell_3 s_1 c_2 - \ell_2 s_1 & -\ell_3 c_1 s_2 \\ \ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1 & -\ell_3 s_1 s_2 \\ 0 & \ell_3 c_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Jacobiano **Geometrico**

$$\boldsymbol{J}_L = \begin{pmatrix} -\ell_3 s_1 c_2 - \ell_2 s_1 & -\ell_3 c_1 s_2 \\ \ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1 & -\ell_3 s_1 s_2 \\ 0 & \ell_3 c_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_A = \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & -c_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$