

Lezione 03/03/2004

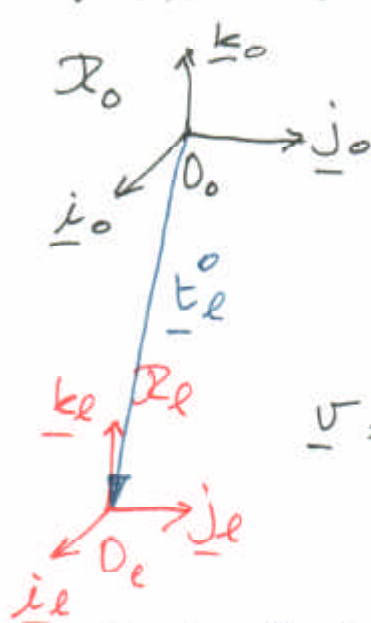
Testo pagg. 19 e segg.

- a) Rappresentazione di traslazioni
- b) Rappresentazione di rotazioni
- c) Vettori omogenei
- d) Roto-traslazioni
- e) Rotazioni elementari
- f) Composizione di rotazioni

ROTOTRASLAZIONI

- COSA SONO
- COME SI "SOMMIANO" / COMBINANO
- CHE SIGNIFICATO HANNO
- DOVE SERVONO

TRASLAZIONI



$$R_0(0_0, \underline{i}_0, \underline{j}_0, \underline{k}_0)$$

✓
VERSORI = VETTORI $\|\cdot\| = 1$

$$\|\underline{i}_0\| = 1 = \|\underline{j}_0\| = \|\underline{k}_0\|$$

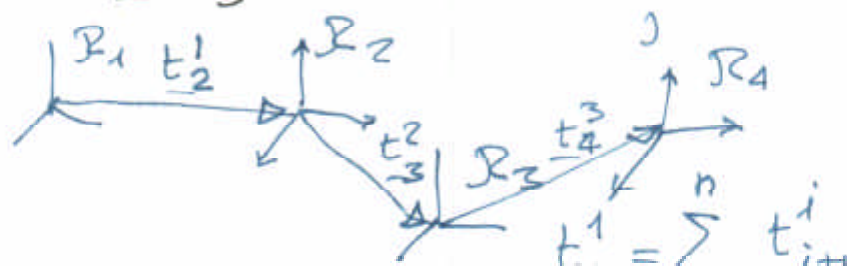
$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} \quad \|\underline{v}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_i^2}$$

R_0

le traslazioni si rappresentano con vettori $\begin{bmatrix} t_e^0 \\ -1 \end{bmatrix}_{R_0}$ di traslazione

$$\begin{bmatrix} t_e^0 \\ -1 \end{bmatrix}_{R_e} \stackrel{?}{=} \begin{bmatrix} t_e^0 \\ -1 \end{bmatrix}_{R_0} \neq \begin{bmatrix} t_e^0 \\ -1 \end{bmatrix}_{\text{quadranti}}$$

$$\begin{bmatrix} t_e^l \\ -1 \end{bmatrix} = \text{traslazione inversa} = -\underline{t}_e^0$$

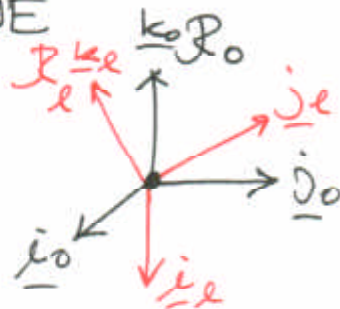


le trasformazioni ricompongono sommandole ②

l'ordine di esecuzione $\bar{e}$
indifferente

- 3 MAR, 2004

ROTAZIONE



$$\begin{bmatrix} \underline{ie} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} \begin{bmatrix} \underline{j_e} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} \begin{bmatrix} \underline{k_e} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0}$$

MATRICE DI
ROTAZIONE

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{ie} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} & \begin{bmatrix} \underline{j_e} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} & \begin{bmatrix} \underline{k_e} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0} \end{bmatrix}_{3 \times 3} = R_e^0$$

matrice ortogonale

R_e^0 rappresenta la rotazione da
0 a e

$\bar{e}$ data dai versori $\underline{e}$ rappresentati in 0

$$R_0^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R_e^e$$

$\begin{bmatrix} \underline{i_0} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0}$

③

R : è orto-normale

- 3 MAR, 2004

$\det R = \pm 1$ $\begin{cases} +1 & \text{se } R \text{ è una rotazione} \\ -1 & \text{se } R \text{ è una rotorefflessione} \end{cases}$

$$RR^T = R^T R = I \Rightarrow R^{-1} = R^T$$

l'operazione inversa è detta della
trasposta

$$R_n^1 = R_2^1 R_3^2 R_4^3 \dots R_n^{n-1}$$

l'ordine del prodotto è
fondamentale !

PRE-FISSO

POST-MOBILE

USO DI VETTORI OMOGENEI

④

PER UNIFICARE ROTAZIONI & TRASLAZIONI? MAR, 2004

$$\underline{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{\tilde{v}} = \begin{bmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \\ \lambda v_3 \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$\lambda = 1$

$$\underline{\tilde{v}} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\tilde{v}} + \underline{\tilde{w}} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{UNO FISSO}$$

UNIFICARE ROT+TRASL IN UNA MATRICE
(DI ROTOTRASLAZIONE) OMOGENEA

$$\begin{matrix} T_e^o \\ 4 \times 4 \end{matrix} = \left[\begin{array}{c|c} 3 \times 3 & \\ \hline R_e^o & \underline{t}_e^o \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right] \leftarrow \text{FISSO}$$

ROTAZIONI ELEMENTARI

5

- 3 MAR. 2024

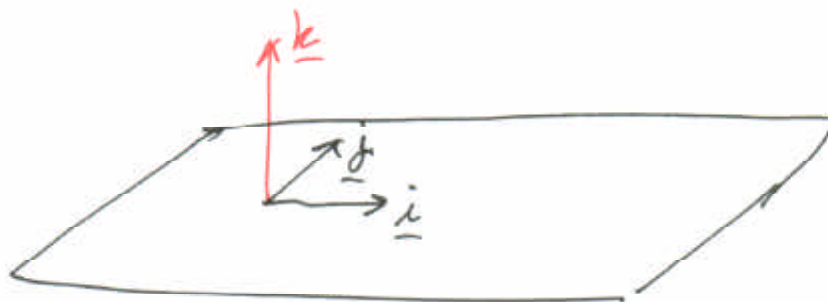
Rotazione di α intorno a i

$$\beta, \underline{j} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} = R(\underline{i}, \alpha)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix} = R(\underline{j}, \beta)$$

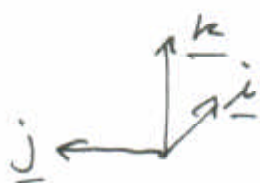
$$\gamma, \underline{k} \quad \begin{bmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = R(\underline{k}, \gamma)$$

Rotazione ~~planare~~



Esempio

$R(\underline{k}, 90^\circ)$ poi $R(\underline{k}, 45^\circ)$



⑥

$$R(k, 90) R(k, 45) = R(k, 135) = \\ = R(k, 45) R(k, 90)$$

-3 MAR, 2004

ROTAZIONI PLANARI (2 DIM)
SI SOMMANO (E QUINDI
COMMUTANO)

$$R(\underline{v}, \alpha_1) R(\underline{v}, \alpha_2) = \\ R(\underline{v}, (\alpha_1 + \alpha_2))$$

$$R(\underline{v}, \alpha)$$

ESEMPIO

a) Rotazione intorno a $\underline{x}$ di -90°
seguita da

b) Rotazione intorno a $\underline{z}$ di $+90^\circ$
prima $\underline{z}$ fisso poi $\underline{z}$ mobile

$$R_a = Rot(\underline{i}, -90^\circ) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R_b = Rot(\underline{k}, 90^\circ) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ES 1 PRE-FISSO

- 3 MAR. 2004

⑦

$$R_b R_a = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\xleftarrow{=} \quad = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{NON E' UNA ROT ELEMENTARE!}$$

ES 2 POST-MOBILE

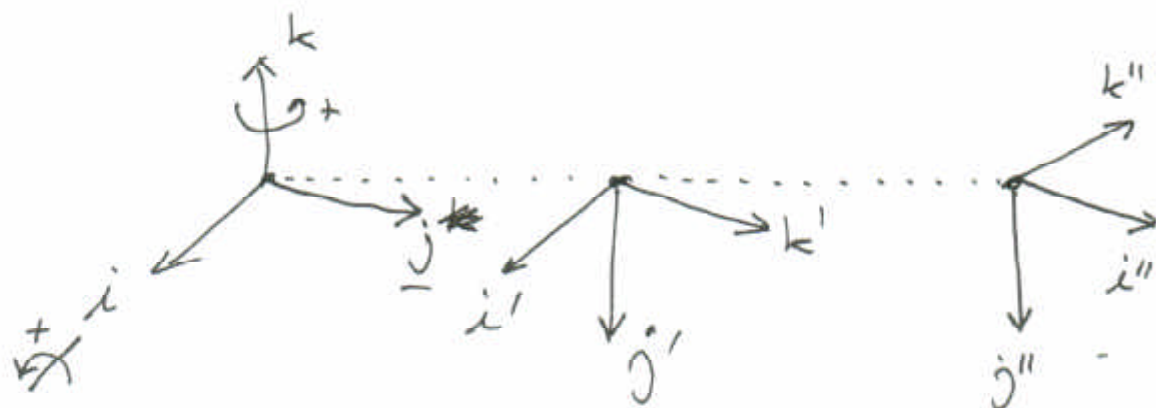
$$R_a R_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ES 1 (PRE-FUSSO)

- 3 MAR. 2004

8



Rappresentiamo P'' in P'

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$i'' \uparrow \quad j'' \uparrow \quad k'' \uparrow$

Lezione 04/03/2004

Testo pagg. 50 e segg.

- a) Rototraslazioni
- b) Angoli di Eulero
- c) Angoli RPY

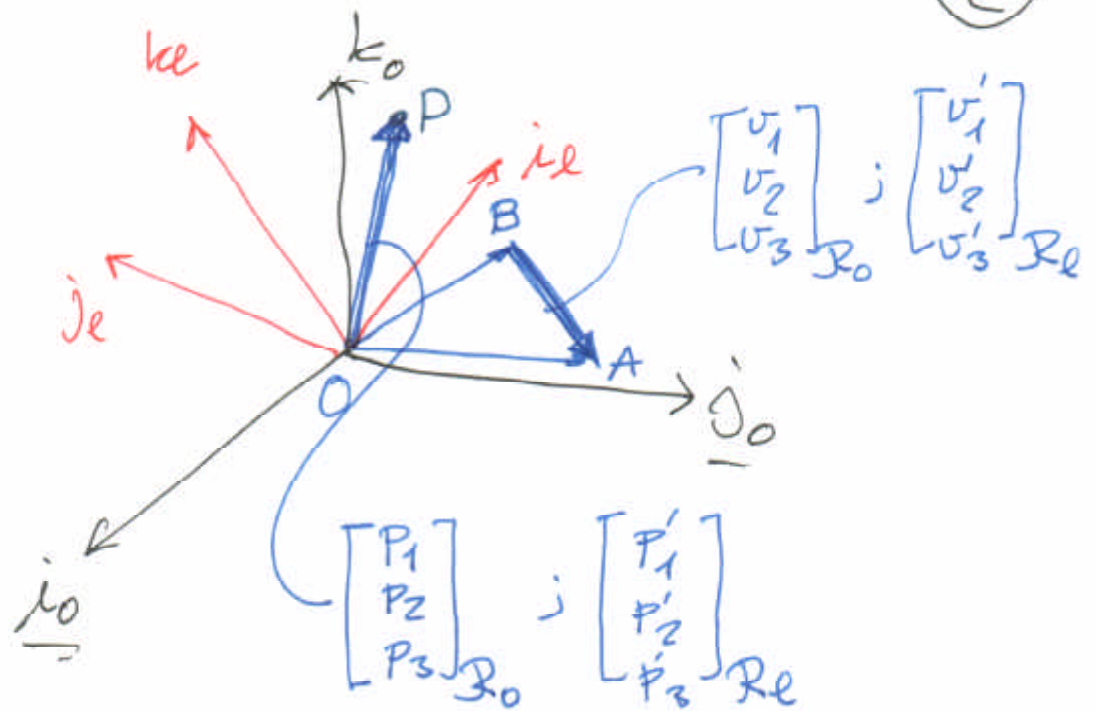
ROTOTRASLAZIONI

NO

R_e^o matrice 3×3
ortonormale; $\det R_e^o = +1$

- 1) R_e^o rappresenta la rotazione
rigida che porta
 $\mathcal{R}_0$ in $\mathcal{R}_e$
- 2) le colonne di R_e^o rappresentano
i vettori di $\mathcal{R}_e$ in $\mathcal{R}_0$
- 3) R_e^o rappresenta l'operatore (lineare)
che trasforma un vettore
rappresentato in $\mathcal{R}_e$ nello stesso
vettore rappresentato in $\mathcal{R}_0$

②



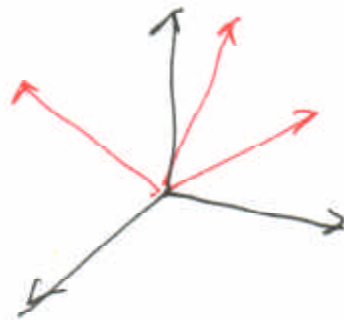
$$\underline{V} = \underline{A} - \underline{B}$$

$$\underline{P} = \underline{P} - \underline{O}$$

$$\begin{bmatrix} P \\ - \end{bmatrix}_{R_0} = R_e^0 \begin{bmatrix} P \\ - \end{bmatrix}_{R_e}$$

$$\begin{bmatrix} V \\ - \end{bmatrix}_{R_0} = R_e^0 \begin{bmatrix} V \\ - \end{bmatrix}_{R_e}$$

③

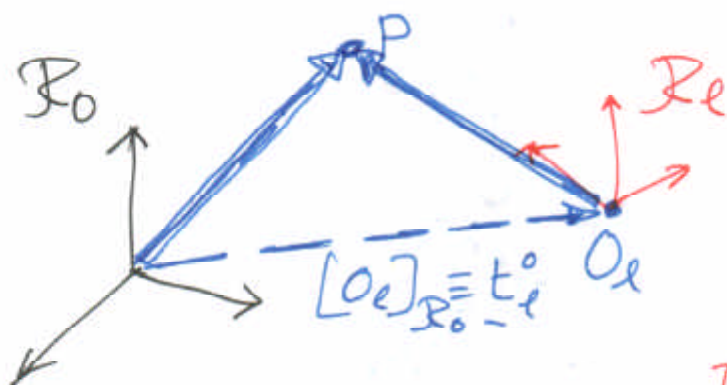


Rappresentiamo $\underline{i}_e, \underline{\dot{i}}_e, \underline{k}_e$ in $\mathcal{R}_0$

$$\underline{i}_0 = R_e^0 \underline{i}_e = \begin{bmatrix} \boxed{} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{}$$

$$\underline{\dot{i}}_0 = R_e^0 \underline{\dot{i}}_e = \begin{bmatrix} \dots & \boxed{} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \boxed{}$$

④



$$[P]_{R_e} = [P]_{R_e} - [O_e]_{R_e} \quad \text{---} [t_e^0]_{R_0}$$

$$\Downarrow$$

$$[P]_{R_0} = R_e^0 [P]_{R_e} - \cancel{R_e^0 [O_e]_{R_e}} \quad \begin{array}{l} \text{trichter} \\ \text{schematisch} \\ \text{NUN} \\ \text{JA} \\ \text{REINE} \end{array}$$

AND
INTEREST $[O_e]_{R_0}$

$$[P]_{R_0} = R_e^0 [P]_{R_e} + t_e^0$$

$$[U]_{R_0} = R_e^0 [A]_{R_e} + \cancel{t_e^0} - R_e^0 [B]_{R_e} - \cancel{t_e^0}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}$
A - B

5

ROTOTRASLAZIONI : COME OPERIAMO?

USANDO LE COORDINATE OMogenee
E LE MATRICI DI TRASF. OMogenea

$$\begin{bmatrix} p \\ - \end{bmatrix}_{R_L} \text{ dato}$$

$\Downarrow$
matrice omogenea

$$\begin{bmatrix} \tilde{p} \\ - \end{bmatrix}_{R_L} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ 1 \end{bmatrix}_{R_L}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{p} \\ - \end{bmatrix}_{R_0} = \begin{bmatrix} R_L^0 & \underline{t}_L^0 \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{p} \\ - \end{bmatrix}_{R_L}$$

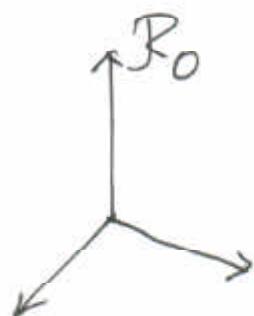
$\downarrow$
 $[0 \ 0 \ 0]$

4×4

$$\begin{bmatrix} p \\ - \end{bmatrix}_{R_0} \text{ togliendo l'1 finale}$$

ESERCIZIO

6



$$[P]_{R_l} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$R_l^0 = \text{Rot}(k, 90^\circ) \text{Rot}(j, -45^\circ)$$

$$R_l^0 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$$

$$T_l^0 = \begin{bmatrix} R_l^0 & \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \underline{0}^T & 1 \end{bmatrix}$$

(7)

$$T_{\ell}^0 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \leftarrow \text{strutturale: } \bar{a} \text{ un vettore omogeneo!}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & | & 1 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 & | & 1 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1+1 \\ \sqrt{2}/2 - \sqrt{2}/2 + 1 \\ \sqrt{2}/2 + \sqrt{2}/2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_{\ell}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \sqrt{2} \end{bmatrix}_{\mathcal{R}_0}$$

8

$$R_l^0 = \begin{bmatrix} | & | & | \end{bmatrix}$$

9 parametri (e 6 vincoli)

estrazione $\Downarrow$

3 parametri angolari:
come li
estraiamo

ANGOLI DI EULERO $\{\phi, \theta, \psi\}$

$$R_{\phi, \theta, \psi} = \text{Rot}(\underline{k}, \phi) \text{Rot}(\underline{i}, \theta) \text{Rot}(\underline{k}, \psi)$$

$\text{Rot}(\underline{j}, \theta)$

zxz "mobile" 50%

zyz "mobile" 50%

ANGOLI (PI) RPY $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$

$$R_{\theta_1, \theta_2, \theta_3} = \text{Rot}(\underline{k}, \theta_3) \text{Rot}(\underline{j}, \theta_2) \text{Rot}(\underline{i}, \theta_1)$$

xyz "fisso"

9

$$\text{Rot}(\underline{k}, \theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

