Cinematica

- La cinematica riguarda lo studio delle 4 funzioni che legano le variabili “giunto” con le variabili “cartesiane”

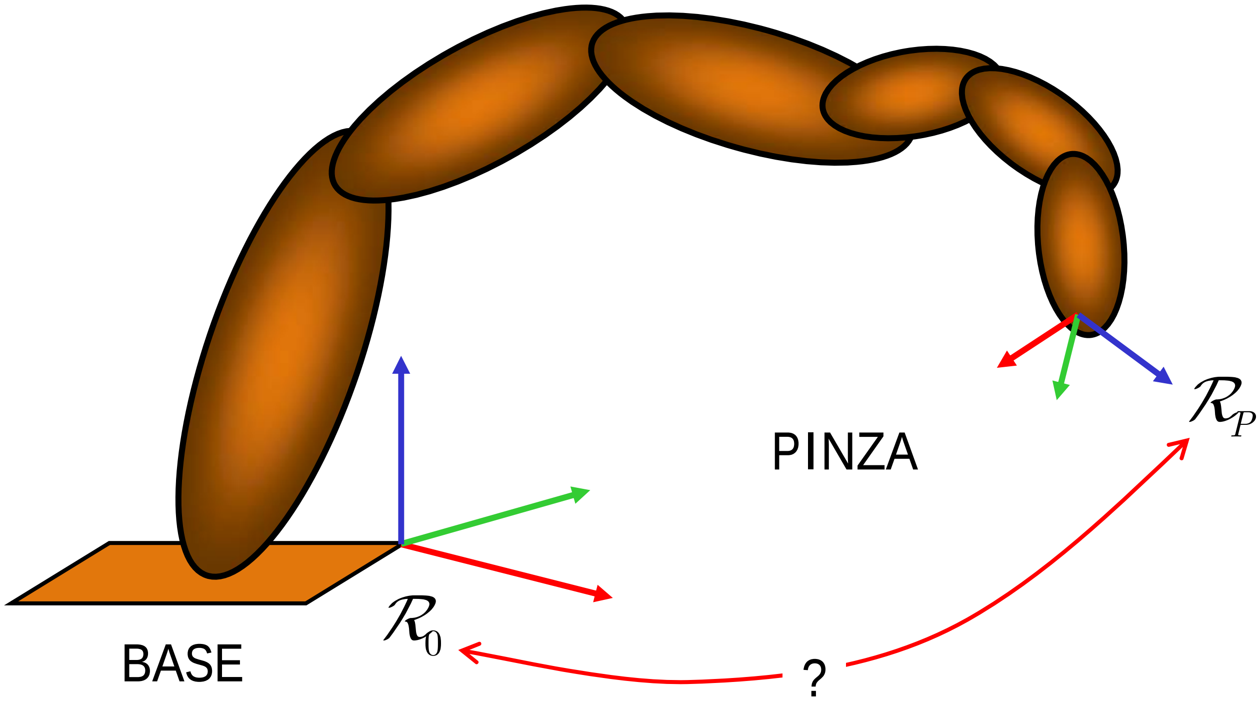
- Cinematica diretta di posizione
- Cinematica inversa di posizione
- Cinematica diretta di velocità
- Cinematica inversa di velocità

- Posizione e velocità di cosa?

- Di solito del riferimento solidale con la punta operativa

Il robot come sistema multi-corpo

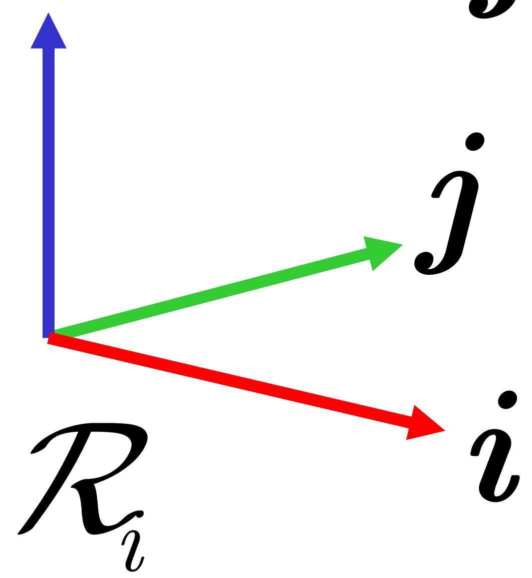
Ogni corpo rigido è caratterizzato da 6 parametri, cioè dal sistema di riferimento solidale ad esso



Riferimento cartesiano

Il riferimento DEVE essere destrorso !!!

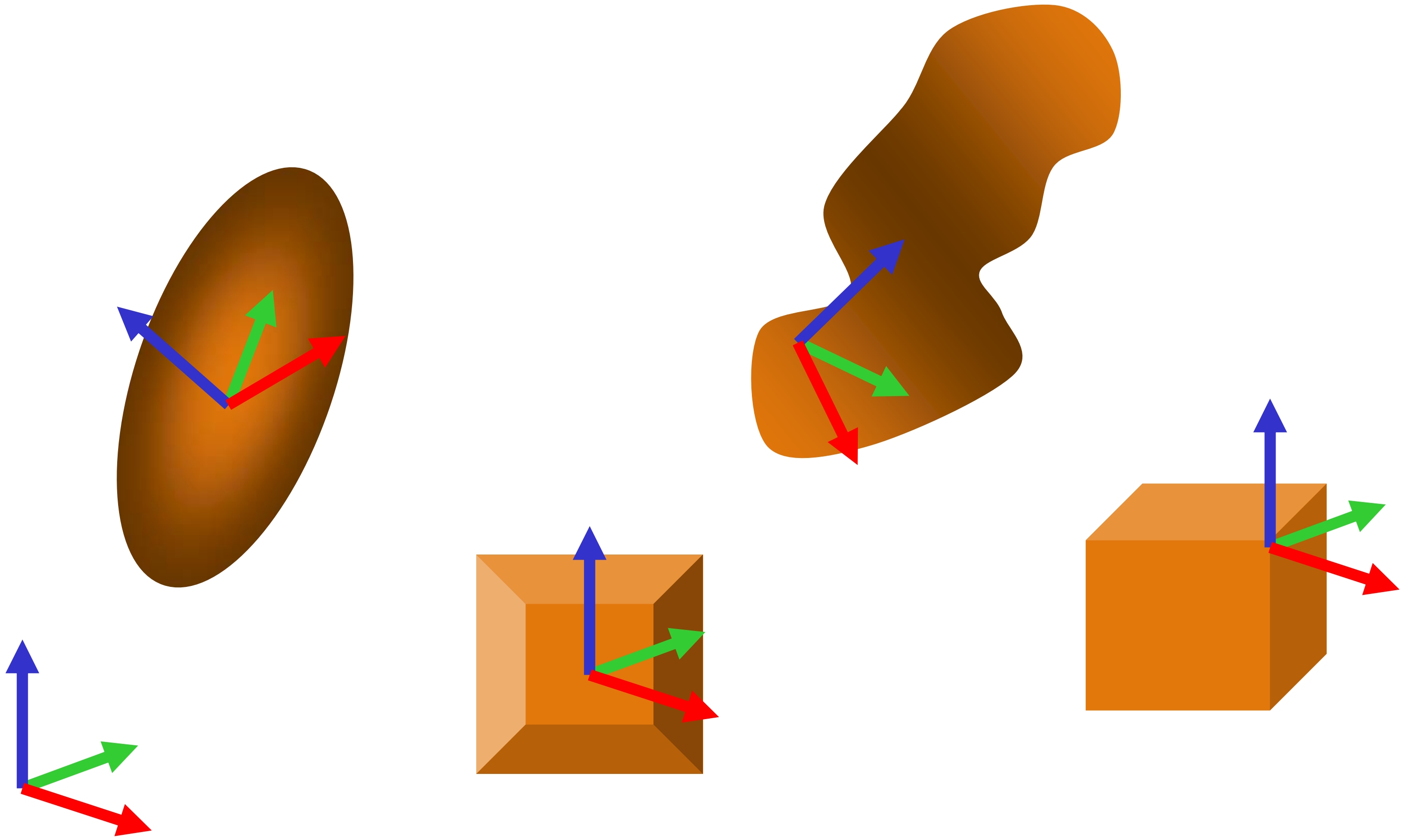
$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i} \times \boldsymbol{j}$$



colori assi RGB = Red Green Blue

Corpo rigido

Un corpo rigido è descrivibile quando è noto il riferimento solidale ad esso e la sua relazione con un riferimento “assoluto” o “inerziale” o “fisso”



Trasformazioni rigide

- Rotazione
- Traslazione
- Roto-traslazione
- Riflessione (impossibile per oggetti reali)

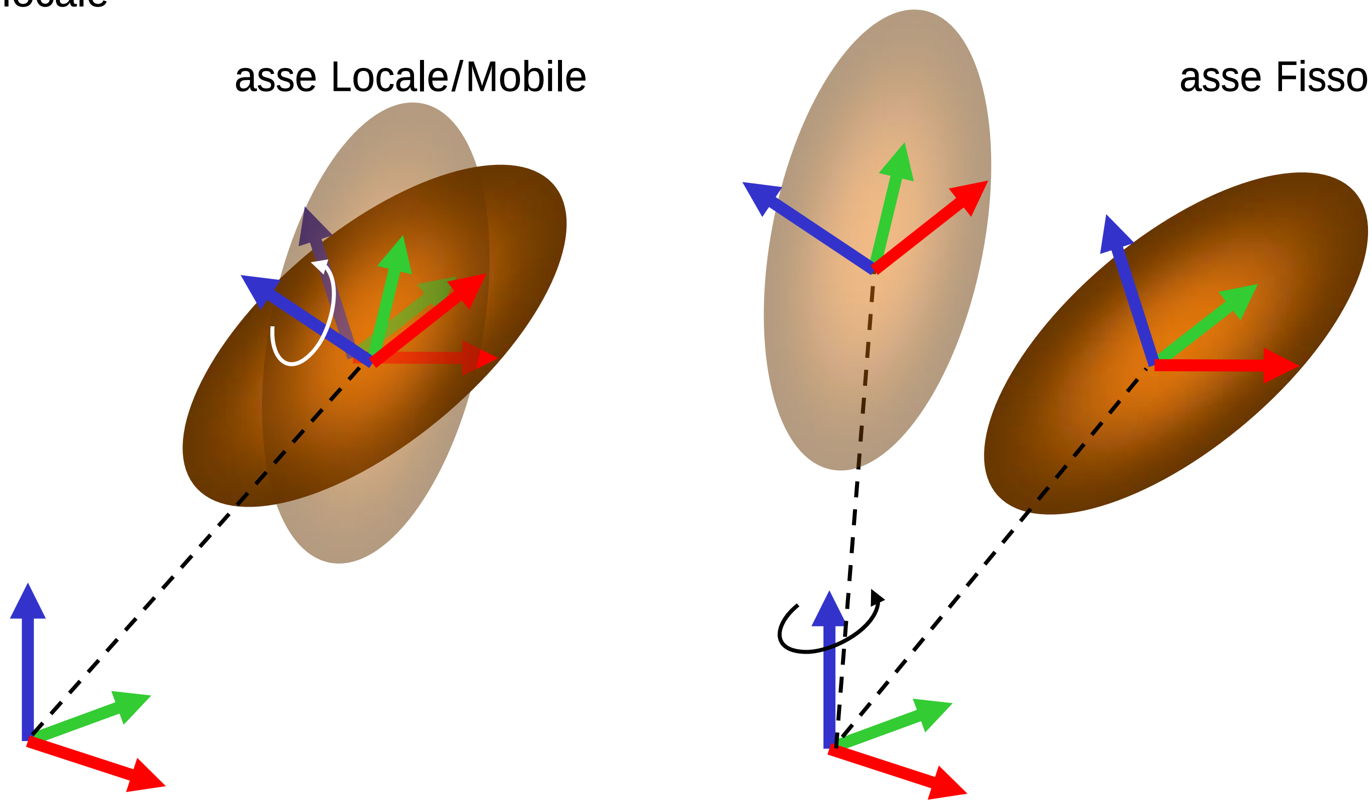
Le trasformazioni hanno un significato geometrico (fisico) e un significato matematico.

A noi interessano entrambi, il primo per capire, il secondo per modellare

Rotazioni (1)

Può essere intorno all’origine del riferimento locale o intorno all’origine del riferimento “fisso”.

Quindi occorre definire l’angolo di rotazione e dire se la rotazione avviene rispetto al fisso o al locale



Rotazioni (2)

- La rotazione è rappresentata da una matrice 3 x 3
- La matrice ha determinante +1 ed è ortonormale, ossia

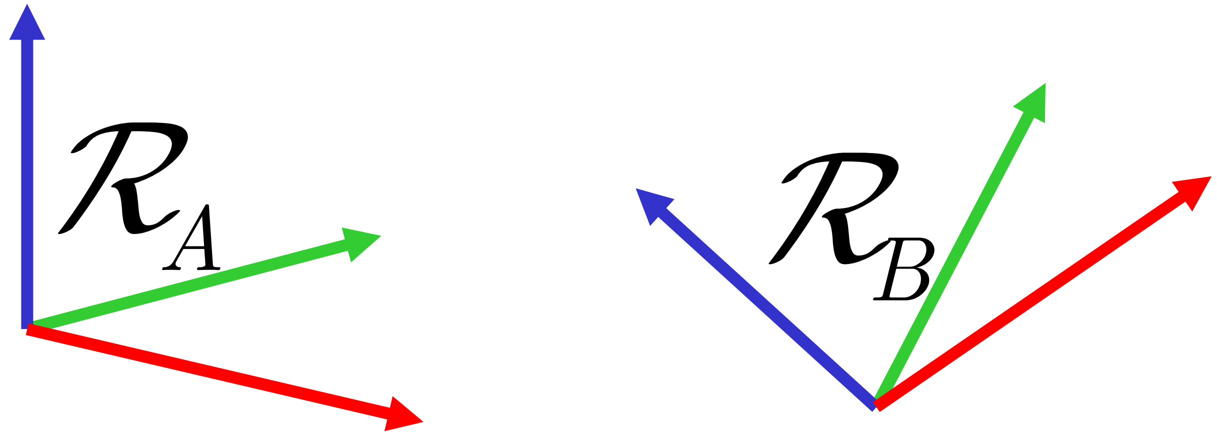
$$\boldsymbol{R}\boldsymbol{R}^{\mathsf{T}} = \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{R} = \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{R}^{-1} = \boldsymbol{R}^{\mathsf{T}}$$

- Ogni riga e ogni colonna hanno norma unitaria
- Di una matrice dovete saper calcolare
  1. Il **determinante**
  2. La **traccia**
  3. La **trasposta**
  4. L'**inversa**
  5. La **norma**
  6. E non sarebbe male anche gli **autovalori**
- Di un vettore dovete saper calcolare la **norma**

Riferimenti e rotazioni (1)

Un riferimento rispetto ad un altro si definisce attraverso una matrice di rotazione



$\boldsymbol{R}_B^A$ rappresenta $\mathcal{R}_B$ in $\mathcal{R}_A$

$\boldsymbol{R}_A^B$ rappresenta $\mathcal{R}_A$ in $\mathcal{R}_B$

$$\boldsymbol{R}_A^B = \left(\boldsymbol{R}_B^A\right)^{\mathsf{T}}$$

Riferimenti e rotazioni (2)

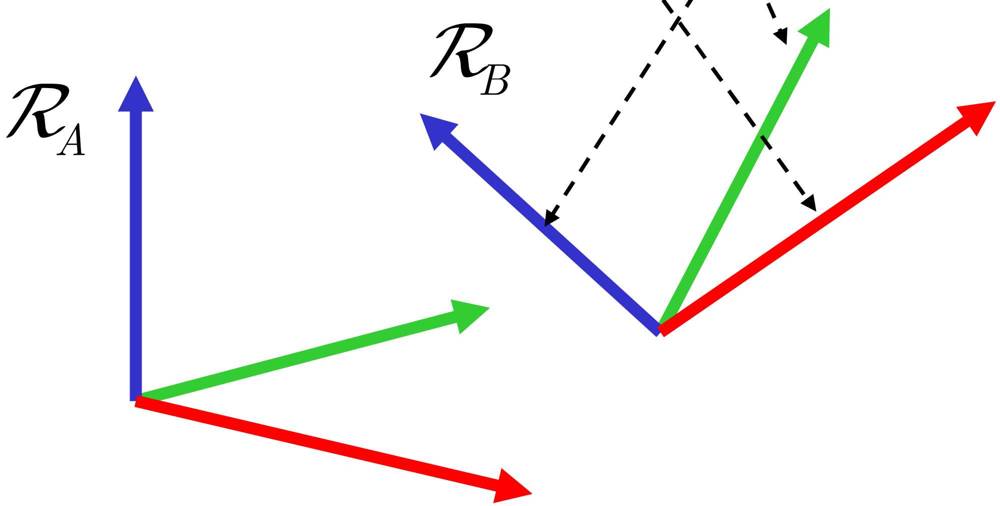
$$\boldsymbol{R}_A^A = \boldsymbol{I}$$

$$\boldsymbol{I} = 1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$= 1\boldsymbol{e}_1 + 1\boldsymbol{e}_2 + 1\boldsymbol{e}_3 = 1\boldsymbol{i} + 1\boldsymbol{j} + 1\boldsymbol{k}$$

Riferimenti e rotazioni (3)

$$\boldsymbol{R}_B^A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_B^A & \boldsymbol{j}_B^A & \boldsymbol{k}_B^A \end{pmatrix}$$



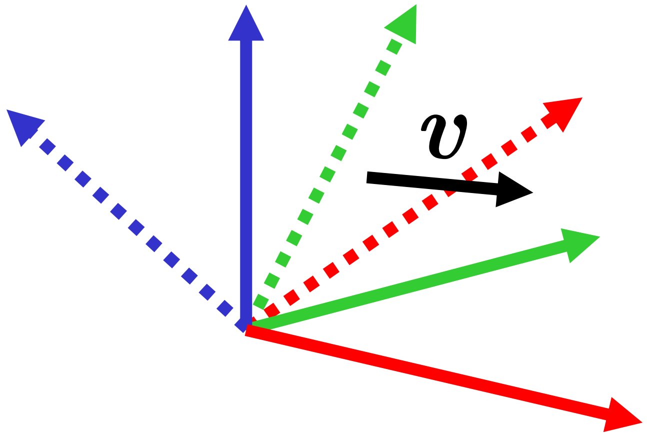
Riferimenti e rotazioni (4)

Una matrice di rotazione rappresenta

- La rotazione fisica per “andare” **dal riferimento *A* al riferimento *B*** (e quindi dal corpo rigido *A* al corpo rigido *B*)
- La rappresentazione dei versori **del riferimento *B* nel riferimento *A***
- Un operatore di trasformazione tra vettori, come vedremo

Rotazioni come trasformazioni (1)

- Caso A: due riferimenti coincidenti

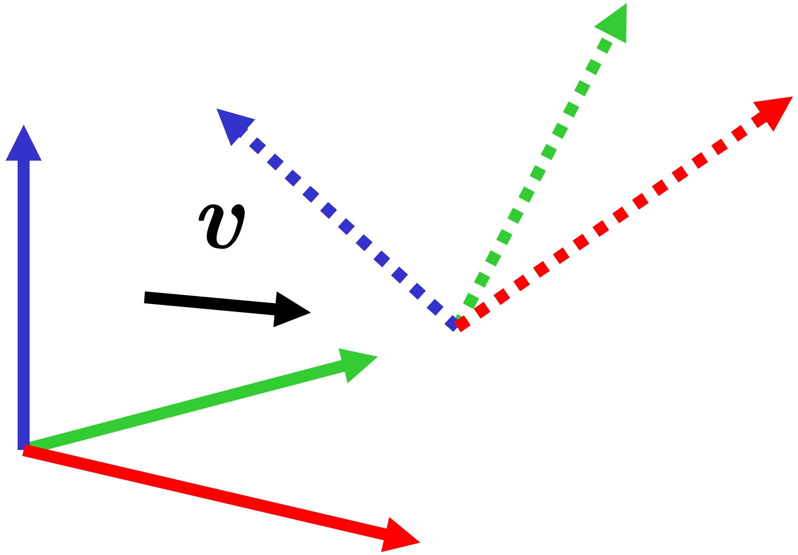


noto $\boldsymbol{v}$ in B quanto vale in A?

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{R}_B^A \boldsymbol{v}_B$$

Rotazioni come trasformazioni (2)

- Caso B: due riferimenti non coincidenti



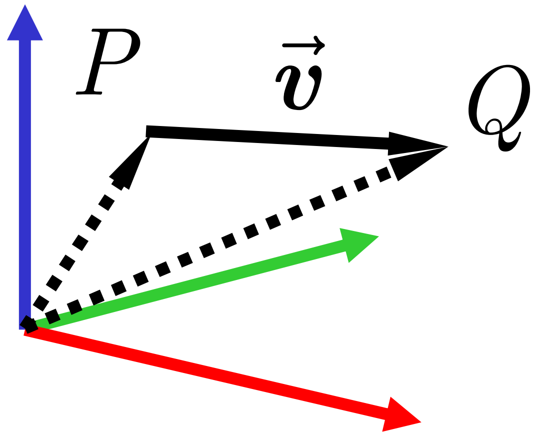
$$\text{noto } \boldsymbol{v} \text{ in } B \text{ quanto vale in } A?$$

Risposta: occorre distinguere

1. Il vettore rappresenta un segmento orientato?
2. Il vettore rappresenta un punto geometrico?

Rotazioni come trasformazioni (3)

- Il vettore rappresenta un segmento orientato, come velocità lineari o angolari, forze, momenti, accelerazioni, campi...

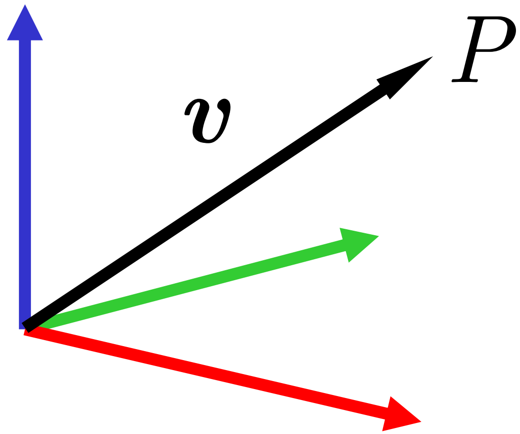


$$\begin{aligned}\vec{\boldsymbol{v}} &= v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \\ &= v_1\boldsymbol{i} + v_2\boldsymbol{j} + v_3\boldsymbol{k} \\ &= v_1\boldsymbol{e}_1 + v_2\boldsymbol{e}_2 + v_3\boldsymbol{e}_3\end{aligned}$$

Modi diversi per dire la stessa cosa

Rotazioni come trasformazioni (4)

- Il vettore rappresenta un punto geometrico



$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= v_x \boldsymbol{i} + v_y \boldsymbol{j} + v_z \boldsymbol{k} \\
&= v_1 \boldsymbol{i} + v_2 \boldsymbol{j} + v_3 \boldsymbol{k} \\
&= v_1 \boldsymbol{e}_1 + v_2 \boldsymbol{e}_2 + v_3 \boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

stessa rappresentazione di prima

ROBOTICA – 01CFIDV 02CFICY

Rotazioni come trasformazioni (5)

- Se rappresenta un segmento orientato, si ha semplicemente

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{R}_B^A \boldsymbol{v}_B$$

- Se rappresenta un punto geometrico

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{R}_B^A \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{t}_B^A$$

Questa è la **traslazione** tra le origini dei sistemi di riferimento (da *A* a *B*)

Se i sistemi di riferimento coincidono $\boldsymbol{t}_B^A = \boldsymbol{0}$

Rotazioni elementari

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{i},\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Intorno all'asse x, o al versore $\boldsymbol{i}$

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{j},\beta} = \begin{pmatrix} \cos\beta & 0 & \sin\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\beta & 0 & \cos\beta \end{pmatrix}$$

Intorno all'asse y, o al versore $\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{R}_{\boldsymbol{k},\gamma} = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma & 0 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Intorno all'asse z, o al versore $\boldsymbol{k}$

Composizione di Rotazioni (1)

- Se componiamo più rotazioni, come si fa?

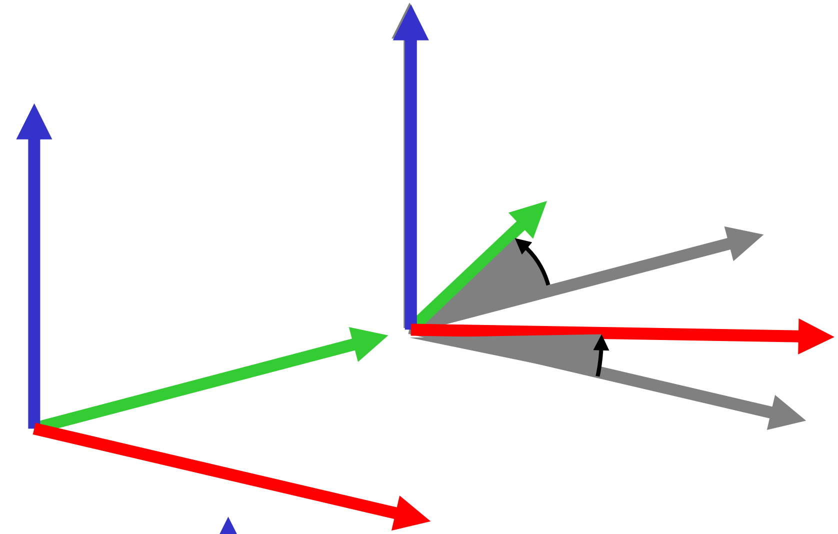
  si moltiplicano tra loro le matrici di rotazione
- ma poiché il prodotto di matrici non è commutativo, quale si mette prima e quale dopo?

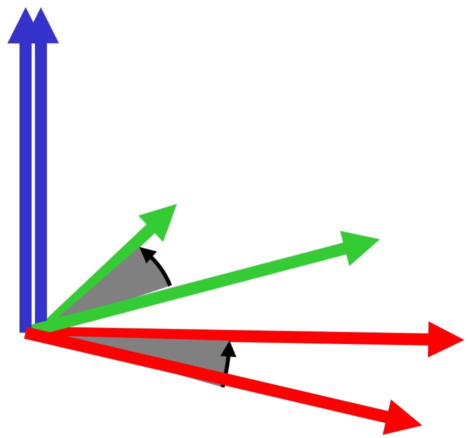
$$\boldsymbol{R}_1\boldsymbol{R}_2 \text{ oppure } \boldsymbol{R}_2\boldsymbol{R}_1\,?$$

- regola: Pre-Fisso; Post-Mobile
- che vuol dire?

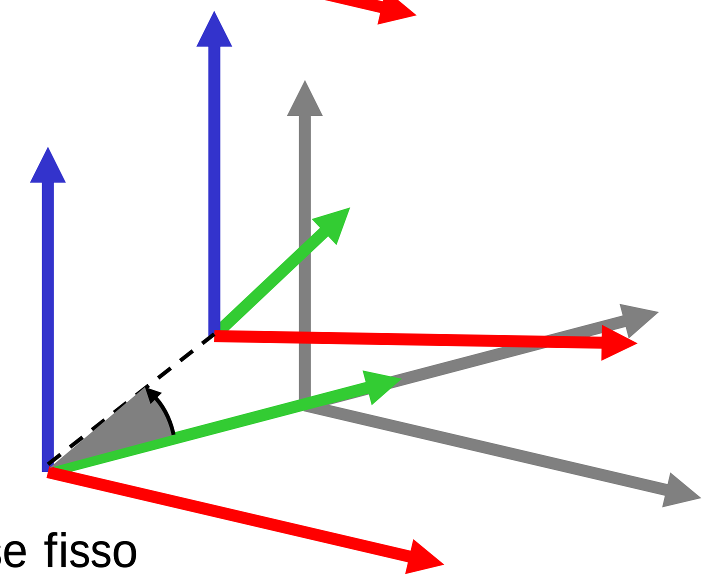
Composizione di Rotazioni (2)

rotazione intorno a asse mobile





rotazione intorno ad asse fisso

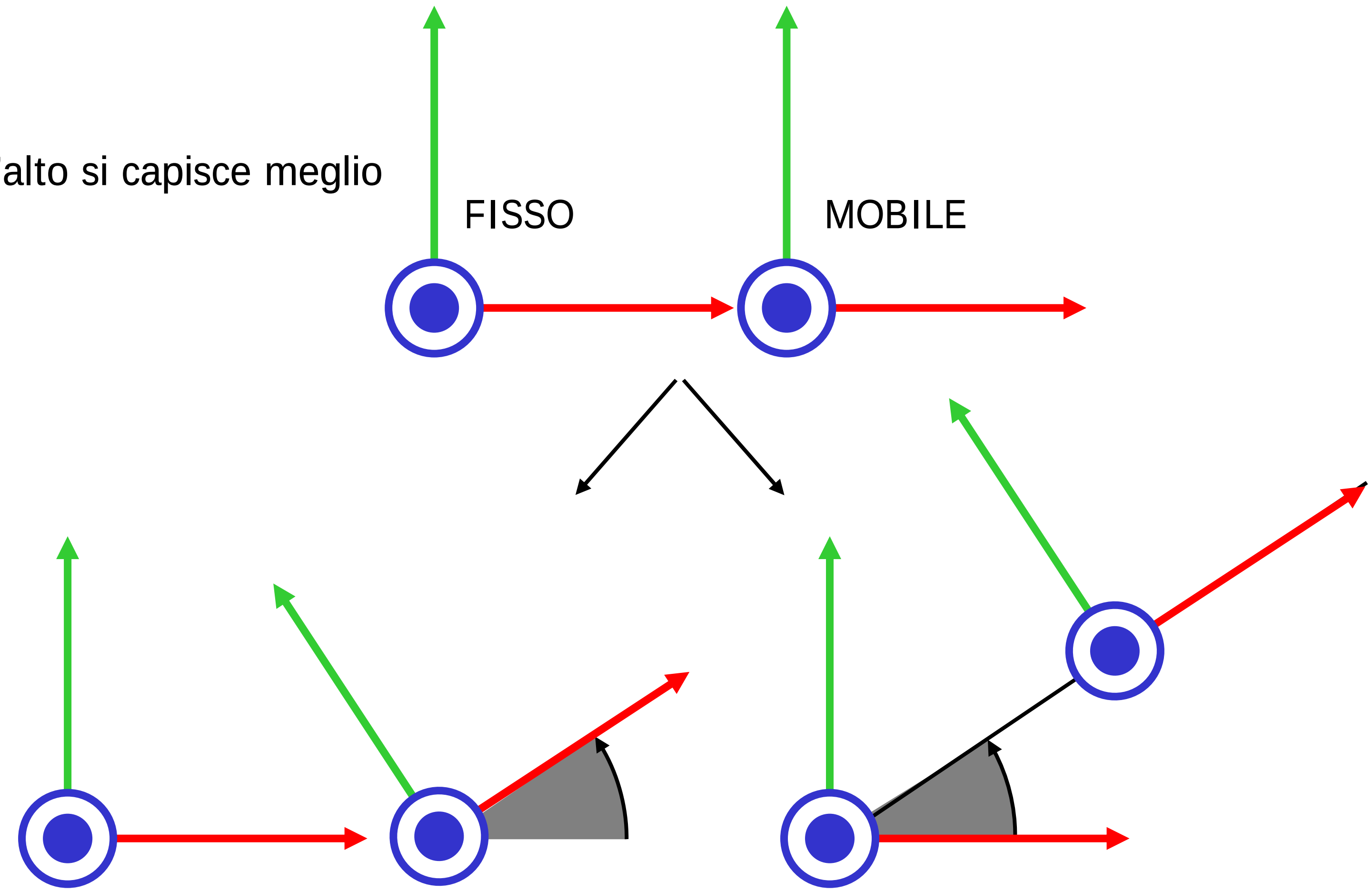


rotazione intorno ad asse fisso

Composizione di Rotazioni (3)

uno viene detto “fisso” l’altro “mobile”
è solo una questione di termini relativi

dall’alto si capisce meglio



rotazione asse “mobile”

rotazione asse “fisso”

Composizione di Rotazioni (4)

cosa succederebbe se cambiassimo le definizioni di fisso e mobile?