Rappresentazione omogenea (1)

Invece di scrivere

$$\boldsymbol{v}_A = \boldsymbol{R}_B^A \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{t}_B^A$$

scriviamo

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_A = \boldsymbol{T}_B^A \tilde{\boldsymbol{v}}_B$$

dove la matrice omogenea $\boldsymbol{T}_B^A$ è fatta così

$$\boldsymbol{T}_B^A = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_B^A & \boldsymbol{t}_B^A \\ \mathbf{0}^\mathsf{T} & 1 \end{pmatrix}$$

Rappresentazione omogenea (2)

dove il vettore $\tilde{\boldsymbol{v}}_B$ è detto *omogeneo*, perchè ha la seguente struttura

$$\tilde{\boldsymbol{v}}_B = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_B \\ 1 \end{pmatrix}$$

Questa 1 è strutturale

Per cui, risulta

$$\boldsymbol{T}_B^A \tilde{\boldsymbol{v}}_B = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_B^A & \boldsymbol{t}_B^A \\ 0^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}_B \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{R}_B^A \boldsymbol{v}_B + \boldsymbol{t}_B^A$$

Rappresentazione omogenea (3)

Trasformazione generica

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix}$$

Trasformazione elementare di **traslazione**

$$\boldsymbol{T}_t = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathsf{Trasl}(\boldsymbol{t})$$

Trasformazione elementare di **rotazione**

$$\boldsymbol{T}_R = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix} \equiv \mathsf{Rot}(\boldsymbol{R})$$

Rappresentazione omogenea (4)

Trasformazione generica; notate che si può decomporre come:

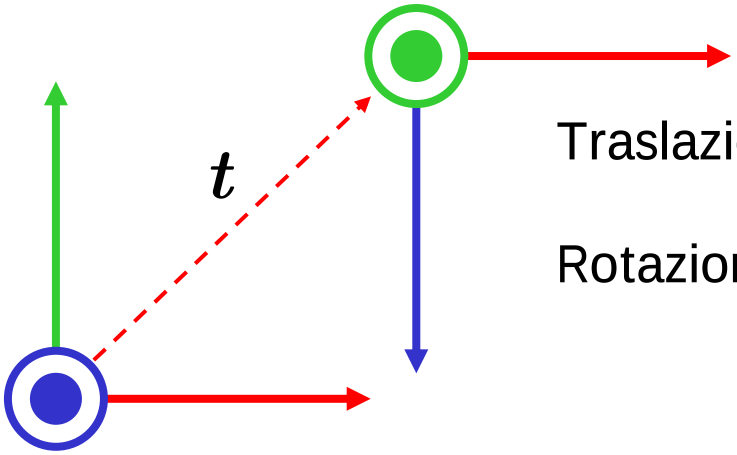
$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^\mathsf{T} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^\mathsf{T} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\mathsf{T} & 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}_t \boldsymbol{T}_R \equiv \mathsf{Trasl}(\boldsymbol{t})\mathsf{Rot}(\boldsymbol{R})$$

Quindi una rototraslazione generica si può sempre descrivere come una traslazione seguita da una rotazione rispetto al sistema mobile oppure come una rotazione seguita da una traslazione rispetto al sistema fisso.

Rappresentazione omogenea (5)

Esempio:

$$\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \boldsymbol{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.2 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix}$$



Traslazione + rotazione “mobile”

Rotazione + traslazione “fisso”

Rappresentazione omogenea (6)

Esempio: calcolare

$$\boldsymbol{T}' = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}' & \boldsymbol{t}' \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{Rot}(\boldsymbol{R})\mathrm{Trasl}(\boldsymbol{t})$$

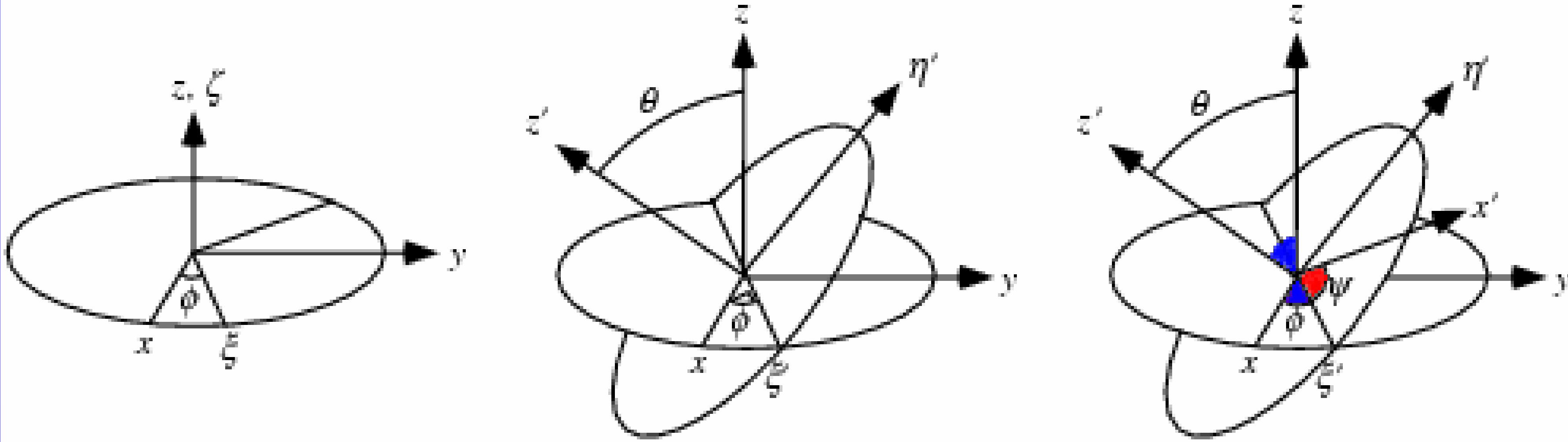
usando i dati dell'esempio precedente.
Soluzione:

$$\mathrm{Rot}(\boldsymbol{R})\mathrm{Trasl}(\boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{R}\boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix}$$

Osservate la differenza

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{R}\boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{t} \\ \mathbf{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix}$$

Angoli di Eulero (1)

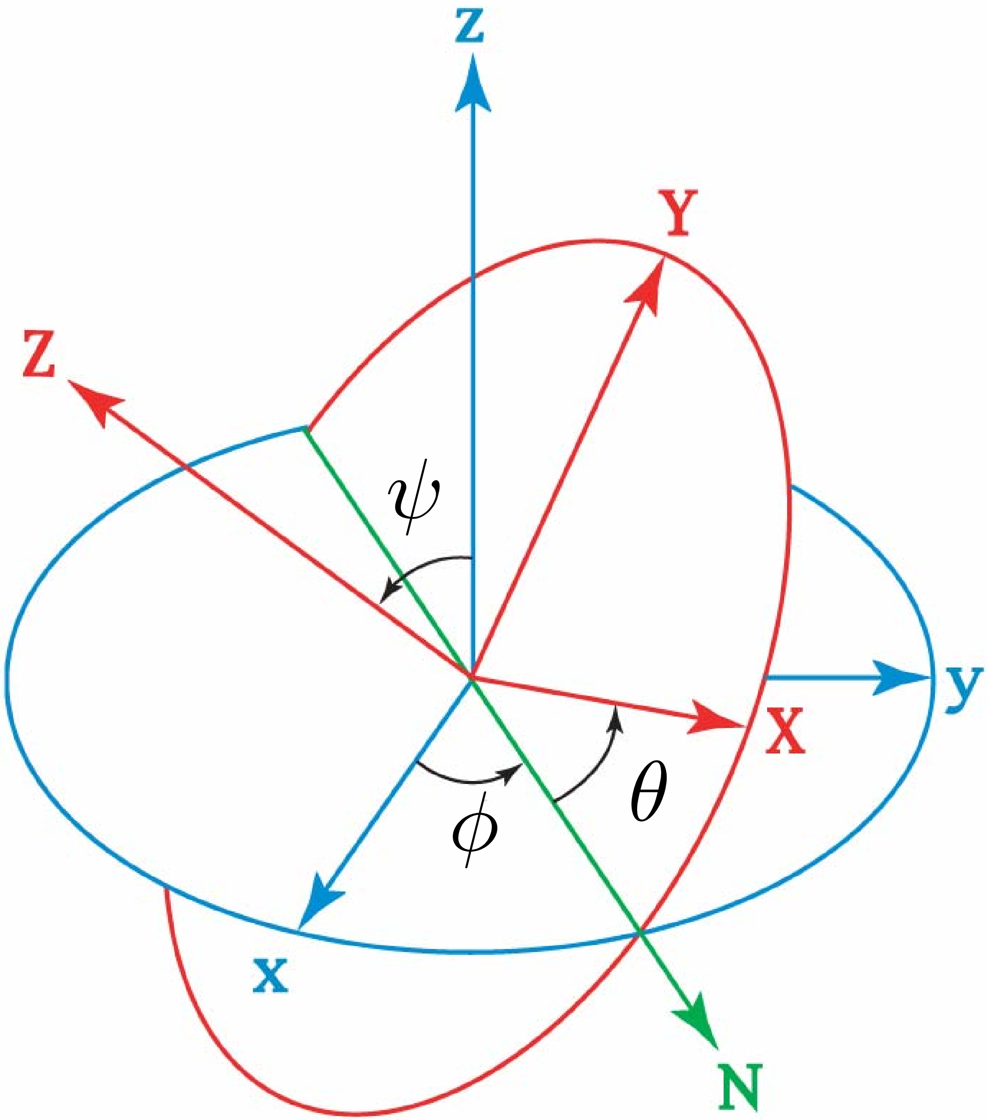


$\mathrm{Rot}(\boldsymbol{k}, \phi)$ $\mathrm{Rot}(\boldsymbol{i}, \theta)$ $\mathrm{Rot}(\boldsymbol{k}, \psi)$

Fisso **Mobile** **Mobile**

$$\begin{pmatrix} c_\phi & -s_\phi & 0 \\ s_\phi & c_\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\theta & -s_\theta \\ 0 & s_\theta & c_\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\psi & -s_\psi & 0 \\ s_\psi & c_\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Angoli di Eulero (2)



Angoli di Eulero (3)

Componendo il prodotto di rotazioni, si ottiene

$$\boldsymbol{R}_{\phi,\theta,\psi} = \boldsymbol{R}(\phi,\theta,\psi) = \boldsymbol{R}_{z,\phi}\boldsymbol{R}_{x,\theta}\boldsymbol{R}_{z,\psi}$$

$$= \boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\phi)\boldsymbol{R}(\boldsymbol{i},\theta)\boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\psi)$$

$$= \begin{pmatrix} \mathsf{c}_\phi\mathsf{c}_\psi - \mathsf{s}_\phi\mathsf{c}_\theta\mathsf{s}_\psi & -\mathsf{c}_\phi\mathsf{s}_\psi - \mathsf{s}_\phi\mathsf{c}_\theta\mathsf{c}_\psi & \mathsf{s}_\phi\mathsf{s}_\theta \\ \mathsf{s}_\phi\mathsf{c}_\psi + \mathsf{c}_\phi\mathsf{c}_\theta\mathsf{s}_\psi & -\mathsf{s}_\phi\mathsf{s}_\psi + \mathsf{c}_\phi\mathsf{c}_\theta\mathsf{c}_\psi & -\mathsf{c}_\phi\mathsf{s}_\theta \\ \mathsf{s}_\theta\mathsf{s}_\psi & \mathsf{s}_\theta\mathsf{c}_\psi & \mathsf{c}_\theta \end{pmatrix}$$

Angoli di Eulero (4)

Per ricavare gli angoli di Eulero da una matrice di rotazione qualsiasi, definita come:

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

occorre risolvere il seguente sistema di equazioni nonlineari:

$$\begin{aligned}
r_{11} &= \mathsf{c}_\phi \mathsf{c}_\psi - \mathsf{s}_\phi \mathsf{c}_\theta \mathsf{s}_\psi \\
r_{12} &= -\mathsf{c}_\phi \mathsf{s}_\psi - \mathsf{s}_\phi \mathsf{c}_\theta \mathsf{c}_\psi \\
r_{13} &= \mathsf{s}_\phi \mathsf{s}_\theta \\
r_{21} &= \mathsf{s}_\phi \mathsf{c}_\psi + \mathsf{c}_\phi \mathsf{c}_\theta \mathsf{s}_\psi \\
r_{22} &= -\mathsf{s}_\phi \mathsf{s}_\psi + \mathsf{c}_\phi \mathsf{c}_\theta \mathsf{c}_\psi \\
r_{23} &= -\mathsf{c}_\phi \mathsf{s}_\theta \\
r_{31} &= \mathsf{s}_\theta \mathsf{s}_\psi \\
r_{32} &= \mathsf{s}_\theta \mathsf{c}_\psi \\
r_{33} &= \mathsf{c}_\theta
\end{aligned}$$

Angoli di Eulero (5)

che ammette come soluzione

$$
\begin{aligned}
\phi &= \mathtt{atan2}\left(r_{13},\ \ -r_{23}\right) \pm 2k\pi \\
\psi &= \mathtt{atan2}\left(-\mathsf{c}_\phi r_{12} - \mathsf{s}_\phi r_{22},\ \ \mathsf{c}_\phi r_{11} + \mathsf{s}_\phi r_{21}\right) \pm 2k\pi \\
\theta &= \mathtt{atan2}\left(\mathsf{s}_\phi r_{13} - \mathsf{c}_\phi r_{23},\ \ r_{33}\right) \pm 2k\pi
\end{aligned}
$$

Si usa la funzione `atan2`

$$
\theta = \mathtt{atan2}(y, x) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)
$$

che è definita anche per entrambi gli argomenti nulli. La funzione è preferibile a $\arccos$ o $\arcsin$ perchè non influenzata da singolarità e più precisa numericamente.

Angoli RPY (1)

$$\mathrm{Rot}(\boldsymbol{i}, \theta_x) \longrightarrow \mathrm{Rot}(\boldsymbol{j}, \theta_y) \longrightarrow \mathrm{Rot}(\boldsymbol{k}, \theta_z)$$

Fisso **Fisso** **Fisso**

$$\longleftarrow \qquad \longleftarrow$$

$$\begin{pmatrix} \mathsf{c}_{\theta_z} & -\mathsf{s}_{\theta_z} & 0 \\ \mathsf{s}_{\theta_z} & \mathsf{c}_{\theta_z} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{c}_{\theta_y} & 0 & \mathsf{s}_{\theta_y} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\mathsf{s}_{\theta_y} & 0 & \mathsf{c}_{\theta_y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathsf{c}_{\theta_x} & -\mathsf{s}_{\theta_x} & 0 \\ \mathsf{s}_{\theta_x} & \mathsf{c}_{\theta_x} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Angoli RPY (2)

$$\boldsymbol{R}_{\theta_x,\theta_y,\theta_z} = \boldsymbol{R}(\theta_x,\theta_y,\theta_z) = \boldsymbol{R}_{z,\theta_z}\boldsymbol{R}_{y,\theta_y}\boldsymbol{R}_{x,\theta_x}$$

$$= \boldsymbol{R}(\boldsymbol{k},\theta_z)\boldsymbol{R}(\boldsymbol{j},\theta_y)\boldsymbol{R}(\boldsymbol{i},\theta_x)$$

$$\begin{pmatrix} \mathsf{C}_{\theta_z}\mathsf{C}_{\theta_y} & \mathsf{S}_{\theta_x}\mathsf{S}_{\theta_y}\mathsf{C}_{\theta_z} - \mathsf{C}_{\theta_x}\mathsf{S}_{\theta_z} & \mathsf{C}_{\theta_x}\mathsf{S}_{\theta_y}\mathsf{C}_{\theta_z} + \mathsf{S}_{\theta_x}\mathsf{S}_{\theta_z} \\ \mathsf{C}_{\theta_y}\mathsf{S}_{\theta_z} & \mathsf{S}_{\theta_x}\mathsf{S}_{\theta_y}\mathsf{S}_{\theta_z} + \mathsf{C}_{\theta_x}\mathsf{C}_{\theta_z} & \mathsf{C}_{\theta_x}\mathsf{S}_{\theta_y}\mathsf{S}_{\theta_z} - \mathsf{S}_{\theta_x}\mathsf{C}_{\theta_z} \\ -\mathsf{S}_{\theta_y} & \mathsf{S}_{\theta_x}\mathsf{C}_{\theta_y} & \mathsf{C}_{\theta_x}\mathsf{C}_{\theta_y} \end{pmatrix}$$

Angoli RPY (3)

Per ricavare gli angoli di RPY da una matrice di rotazione qualsiasi, definita come:

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$$

si applicano le seguenti funzioni

$$\begin{aligned}
\theta_x &= \texttt{atan2}\left(r_{32},\ \ r_{33}\right) \pm 2k\pi \\
\theta_z &= \texttt{atan2}\left(-\mathsf{c}_{\theta_x} r_{12} + \mathsf{s}_{\theta_x} r_{13},\ \ \mathsf{c}_{\theta_x} r_{22} - \mathsf{s}_{\theta_x} r_{23}\right) \pm 2k\pi \\
\theta_y &= \texttt{atan2}\left(-r_{31},\ \ \mathsf{s}_{\theta_x} r_{32} + \mathsf{c}_{\theta_x} r_{33}\right) \pm 2k\pi
\end{aligned}$$