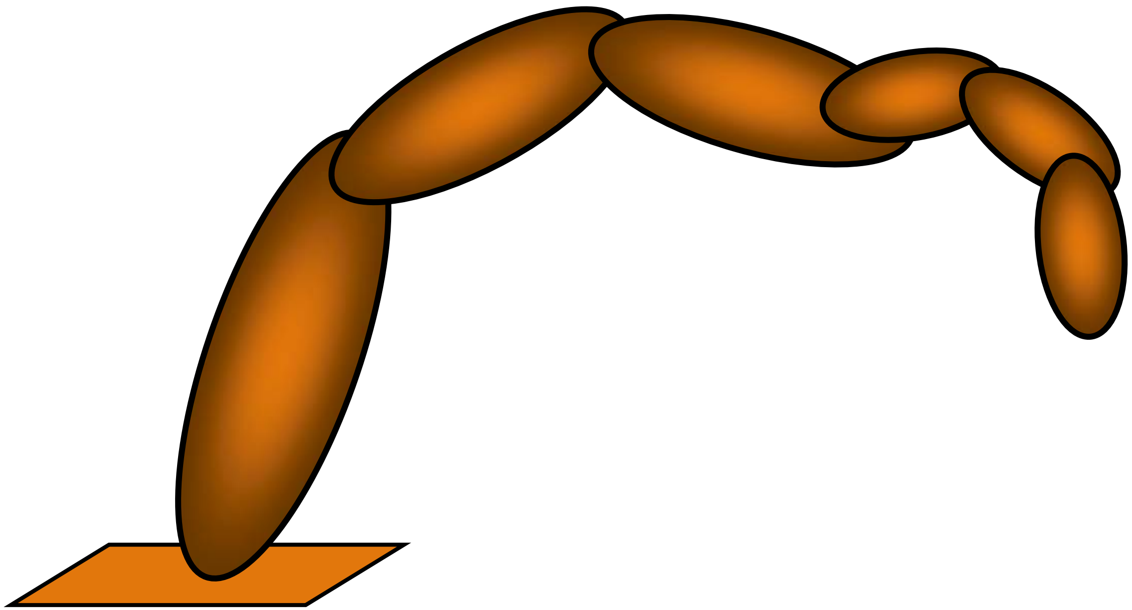
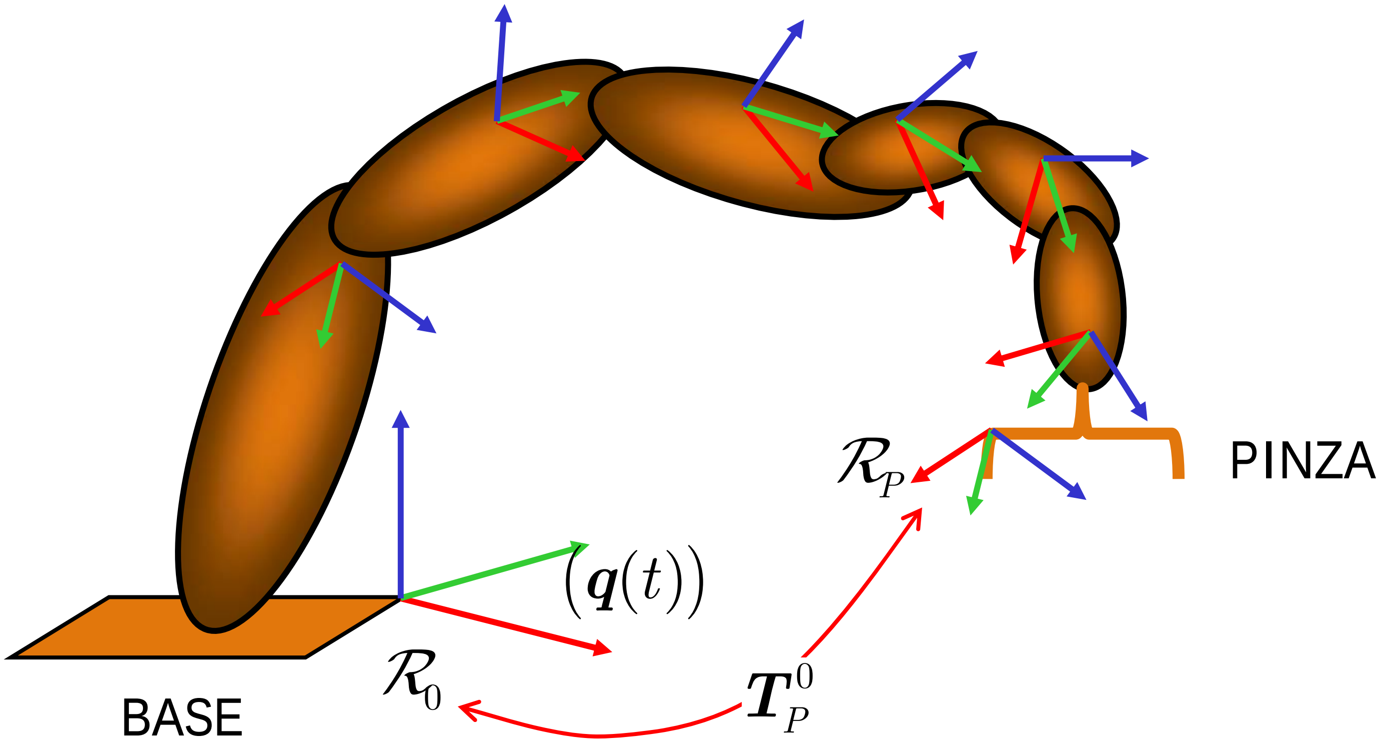
Cinematica - Procedura

1. Individuare bracci e giunti
2. Caratterizzarli con riferimenti
3. Caratterizzare base e punta con riferimenti
4. Applicare convenzioni DH; definire i parametri geometrici; definire i parametri giunto
5. Calcolare la trasformazione omogenea base-punta
6. Estrarre da essa la cinematica diretta posizione
7. Cinematica inversa posizione; è più complicato
8. Cinematica diretta velocità: approccio analitico o geometrico
9. Cinematica inversa velocità: problema delle singolarità cinematiche

Individuare bracci e giunti

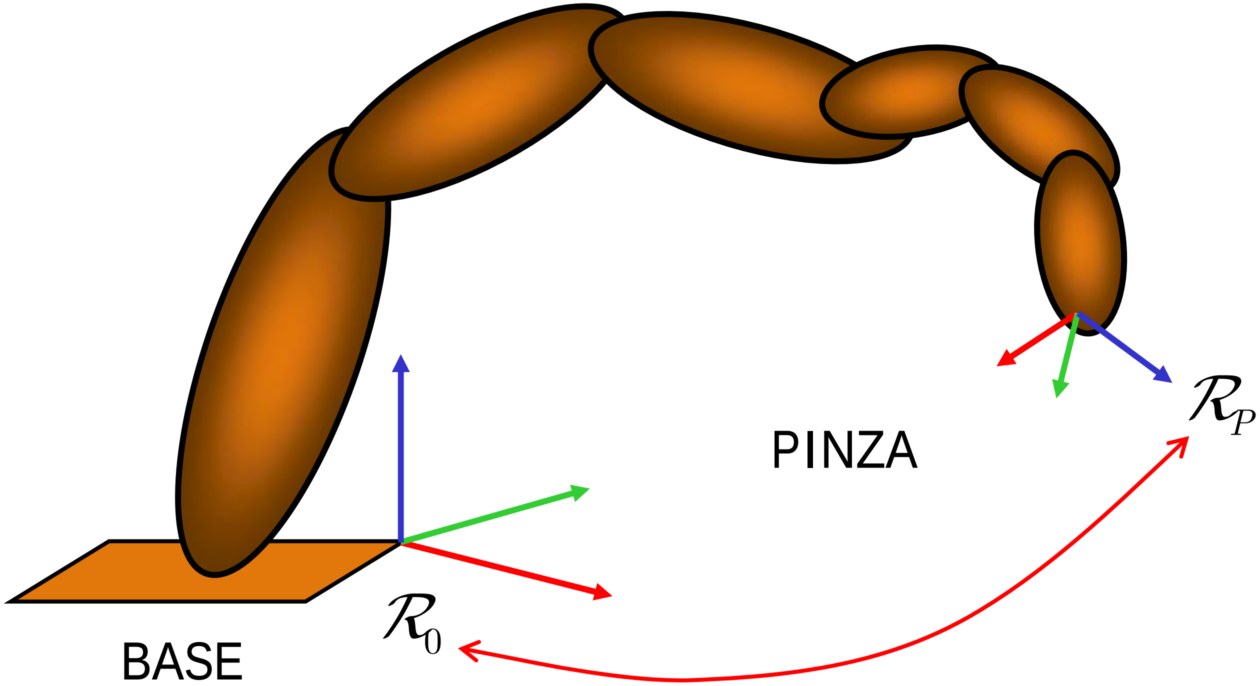


Applicare riferimenti



$$\boldsymbol{T}_P^0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_P^0 & \boldsymbol{t}_P^0 \\ \boldsymbol{0}^{\mathsf{T}} & 1 \end{pmatrix}$$

Applicare convenzioni DH



Variabili giunto e cartesiane

Variabili giunto

$$\boldsymbol{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ q_4(t) \\ q_5(t) \\ q_6(t) \end{pmatrix}$$

Variabili cartesiane

$$\boldsymbol{p}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \alpha_1(t) \\ \alpha_2(t) \\ \alpha_3(t) \end{pmatrix}$$

Cinematica diretta

$$\boldsymbol{p}(t) = \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{q}(t)\right)$$

Cinematica inversa

$$\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{f}^{-1}\left(\boldsymbol{p}(t)\right)$$

Funzione cinematica diretta posizione (1)

Funzione cinematica diretta di posizione e assetto
Caso robot non ridondante 6 gdm

posizione

$$\boldsymbol{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ q_4(t) \\ q_5(t) \\ q_6(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}(t)) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \\ p_3(t) \\ p_4(t) \\ p_5(t) \\ p_6(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}(\boldsymbol{q}(t)) \\ \cdots \\ \boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{q}(t)) \end{pmatrix}$$

assetto

$$\boldsymbol{T}_P^0 = \boldsymbol{T}_1^0(q_1)\boldsymbol{T}_2^1(q_2)\boldsymbol{T}_3^2(q_3)\boldsymbol{T}_4^3(q_4)\boldsymbol{T}_5^4(q_5)\boldsymbol{T}_6^5(q_6)\boldsymbol{T}_P^6 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_P^0 & \boldsymbol{t}_P^0 \\ \boldsymbol{0}^\mathsf{T} & 1 \end{pmatrix}$$

assetto

$$\boldsymbol{R}_P^0 = \boldsymbol{R}_P^0(\boldsymbol{q}(t))$$

posizione

$$\boldsymbol{t}_P^0 = \boldsymbol{t}_P^0(\boldsymbol{q}(t))$$

Funzione cinematica diretta posizione (2)

$$\boldsymbol{T}_P^0 = \begin{pmatrix} \boldsymbol{R}_P^0 & \boldsymbol{t}_P^0 \\ \boldsymbol{0}^\mathsf{T} & 1 \end{pmatrix}$$

Cinematica diretta di posizione cartesiana: facile

$$\boldsymbol{x} \equiv \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boldsymbol{t}_P^0 \equiv \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{pmatrix}$$

Cinematica diretta di assetto abbastanza facile

Funzione cinematica diretta posizione (3)

$$\boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{q}(t)\right) \Rightarrow \boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{q}(t)\right)$$

occorre definire la rappresentazione angolare che vogliamo utilizzare

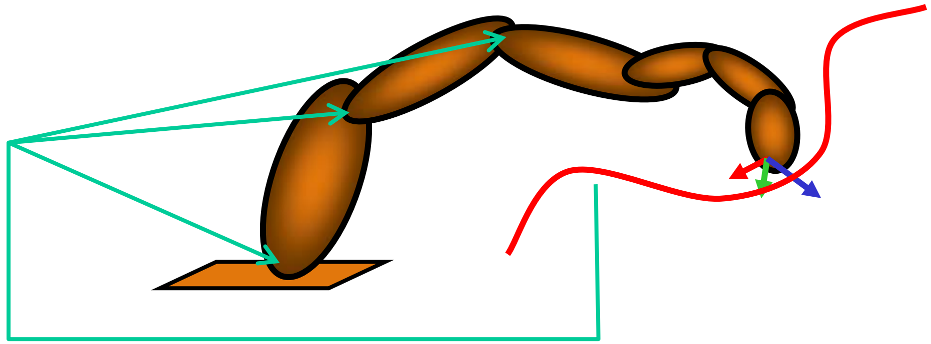
$\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{q}(t)\right)?$

angoli di eulero
angoli RPY
asse-angolo
quaternioni
coseni direttori=matrici di rotazione
parametri di eulero

Funzione cinematica inversa posizione (1)

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}(t)) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{q}(t)\right) \\ \cdots \\ \boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{q}(t)\right) \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{q}(t) = \begin{pmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ q_3(t) \\ q_4(t) \\ q_5(t) \\ q_6(t) \end{pmatrix}$$

Necessarie per il controllo a partire dall spazio cartesiano: vogliamo un target in cartesiano, ma il controllo è sui motori



Funzione cinematica inversa posizione (2)

1. Il problema si rivela complesso e senza una chiara ricetta per trovare la soluzione.
2. Se esiste un *polso sferico* allora siamo garantiti che la soluzione esiste, ma occorre trovarla
3. Le strade sono molteplici
   - Utilizzare la forza bruta o soluzioni simili trovate per altre catene cinematiche
   - Utilizzare la cinematica inversa di velocità
   - Utilizzare programmi di calcolo simbolico (computer algebra systems: Mathematica, Maple, Maxima, ..., Lisp)
   - Calcolare iterativamente approssimazioni numeriche all'equazione $\boldsymbol{q}(t) = \boldsymbol{f}^{-1}\left(\boldsymbol{p}(t)\right)$

$$\boldsymbol{q}(t) - \boldsymbol{f}^{-1}\left(\boldsymbol{p}(t)\right) = 0$$

$$\min\left\{\left|\boldsymbol{q}(t) - \boldsymbol{f}^{-1}\left(\boldsymbol{p}(t)\right)\right|\right\}$$

ROBOTICA – 01CFIDV 02CFICY

Funzione cinematica diretta velocità (1)

Funzione cinematica diretta di velocità lineare e angolare
Caso robot non ridondante 6 gdm

velocità lineare

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \dot{q}_2(t) \\ \dot{q}_3(t) \\ \dot{q}_4(t) \\ \dot{q}_5(t) \\ \dot{q}_6(t) \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{p}}(t) = \begin{pmatrix} \dot{p}_1(t) \\ \dot{p}_2(t) \\ \dot{p}_3(t) \\ \dot{p}_4(t) \\ \dot{p}_5(t) \\ \dot{p}_6(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)\right) \\ \cdots \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}\left(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)\right) \\ \cdots \\ \boldsymbol{\omega}\left(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)\right) \end{pmatrix}$$

velocità angolare

Funzione cinematica diretta velocità (2)

Cosa dice l'analisi matematica?

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{p}(\boldsymbol{q}(t)) = \begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}\left(\boldsymbol{q}(t)\right) \\ \cdots \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{\alpha}\left(\boldsymbol{q}(t)\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_i\left(\boldsymbol{q}(t)\right) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_i\left(q_1(t), \ldots, q_j(t), \ldots, q_n(t)\right) \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial q_1}\dot{q}_1(t) + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial q_j}\dot{q}_j(t) + \ldots + \frac{\partial f_i}{\partial q_n}\dot{q}_n(t) \end{aligned}$$

Funzione cinematica diretta velocità (3)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f_i\left(\boldsymbol{q}(t)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_i}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial q_j} & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_j(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_n(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}^{\mathsf{T}}{}_{fi}\left(\boldsymbol{q}(t)\right)\dot{\boldsymbol{q}}(t)$$

JACOBIANO

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \boldsymbol{f}\left(\boldsymbol{q}(t)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial q_j} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial q_j} & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial q_n} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial q_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial q_j} & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial q_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_j(t) \\ \vdots \\ \dot{q}_n(t) \end{pmatrix} = \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{q}(t)\right)\dot{\boldsymbol{q}}(t)$$

Funzione cinematica diretta velocità (4)

Quindi

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t) = \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{q}(t)\right)\dot{\boldsymbol{q}}(t)$$

o anche

JACOBIANO LINEARE

$$\dot{\boldsymbol{p}}(t) \equiv \begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)\right) \\ \cdots \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}\left(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)\right) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \boldsymbol{v}\left(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)\right) \\ \cdots \\ \boldsymbol{\omega}\left(\boldsymbol{q}(t), \dot{\boldsymbol{q}}(t)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_L\left(\boldsymbol{q}(t)\right) \\ \boldsymbol{J}_A\left(\boldsymbol{q}(t)\right) \end{pmatrix}\dot{\boldsymbol{q}}(t)$$

JACOBIANO ANGOLARE

Funzione cinematica inversa velocità (1)

$$\dot{\boldsymbol{q}}(t) = \boldsymbol{J}^{-1}\left(\boldsymbol{q}(t)\right)\dot{\boldsymbol{p}}(t)$$

solo se la matrice è quadrata (6 x 6)

la matrice è invertibile se $\det \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{q}(t)\right) \neq 0$

quando $\det \boldsymbol{J}\left(\boldsymbol{q}_S(t)\right) = 0$

si dice che ho *singolarità* per $\boldsymbol{q}_S(t)$

$\boldsymbol{q}_S(t)$ è una configurazione di *singolarità*