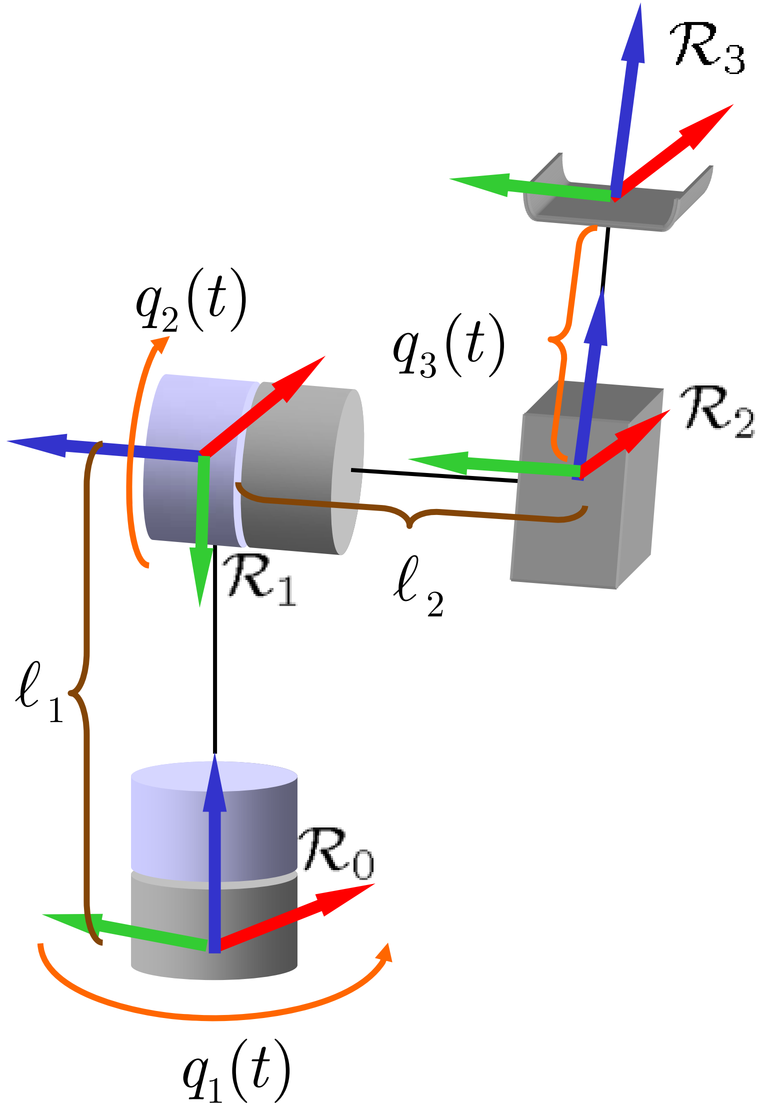
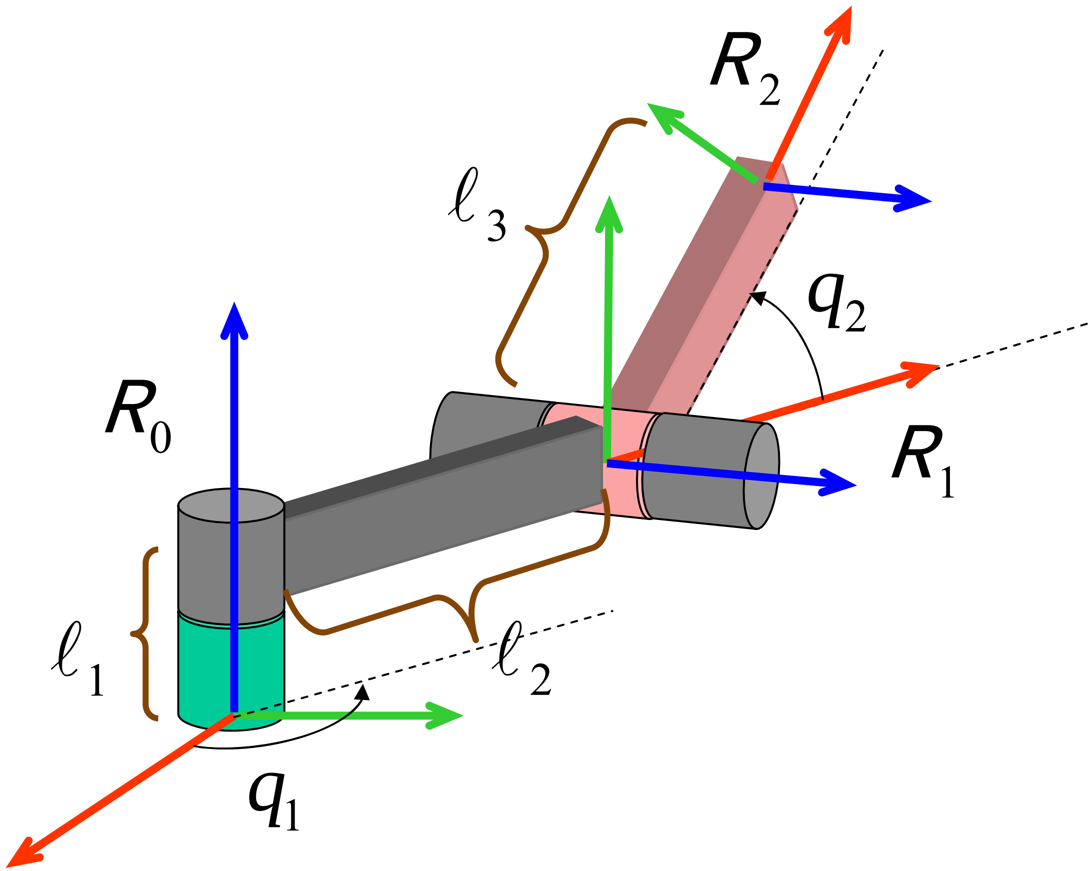
Esempio di Parametri DH (1)

	d	θ	a	α
1	ℓ_1	$q_1(t)$	0	-90°
2	$-\ell_2$	$q_2(t)$	0	90°
3	$q_3(t)$	0	0	0



Esempio di cinematica (1)



Esempio di cinematica (2)

Parametri di Denavit – Hartenberg

i	d_i	θ_i	a_i	α_i
1	ℓ_1	$q_1(t)$	ℓ_2	$\pi/2$
2	0	$q_2(t)$	ℓ_3	0

Esempio di cinematica (3)

$$\boldsymbol{T}_1^0 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_1 & 0 & s_1 \\ s_1 & 0 & -c_1 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix}} & \begin{matrix} \ell_2 c_1 \\ \ell_2 s_1 \\ \ell_1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{R}_1^0$$

$$\boldsymbol{T}_2^1 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_2 & -s_2 & 0 \\ s_2 & c_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} & \begin{matrix} \ell_3 c_2 \\ \ell_3 s_2 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{R}_2^1$$

$$\boldsymbol{T}_1^0 \boldsymbol{T}_2^1 = \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & -c_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} \ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1 \\ \ell_3 s_1 c_2 + \ell_2 s_1 \\ \ell_3 s_2 + \ell_1 \end{matrix}} \\ \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{R}_2^0 \quad \boldsymbol{t}_2^0$$

Cinematica diretta di posizione (1)

$$x(t) = \ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1$$

$$y(t) = \ell_3 s_1 c_2 + \ell_2 s_1$$

Eq. 1

$$z(t) = \ell_3 s_2 + \ell_1$$

$$R_2^0 = \begin{pmatrix} c_1 c_2 & -c_1 s_2 & s_1 \\ s_1 c_2 & -s_1 s_2 & -c_1 \\ s_2 & c_2 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \phi(t) &= q_1(t) \\ \theta(t) &= \pi/2 \\ \psi(t) &= q_2(t) \end{aligned}$$

Angoli di Eulero
(2.79) pag. 52

Cinematica inversa di posizione (1)

Se conoscessimo gli angoli di Eulero non ci sarebbero difficoltà; supponiamo di non conoscerli. Iniziamo dal sistema:

$$x(t) = \ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1$$
$$y(t) = \ell_3 s_1 c_2 + \ell_2 s_1$$
$$z(t) = \ell_3 s_2 + \ell_1$$

$$s_2 = \frac{z - \ell_1}{\ell_3}$$

$$x(t) = \ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1$$
$$y(t) = \ell_3 s_1 c_2 + \ell_2 s_1$$
$$z(t) = \ell_3 s_2 + \ell_1$$

Quadrando e sommando

$$x^2 + y^2 \equiv a^2 = \left(\ell_2 + \ell_3 c_2\right)^2$$

$$c_2 = \frac{a - \ell_2}{\ell_3}$$

Cinematica inversa di posizione (2)

$$s_2 = \frac{z - \ell_1}{\ell_3}$$

$$c_2 = \frac{a - \ell_2}{\ell_3}$$

$$\tan q_2 = \frac{s_2}{c_2} = \frac{z - \ell_1}{a - \ell_2}$$

$$x(t) = \left(\ell_3 c_2 + \ell_2\right) c_1$$
$$y(t) = \left(\ell_3 c_2 + \ell_2\right) s_1$$

$$c_1 = \frac{x(t)}{\left(\ell_3 c_2 + \ell_2\right)}$$
$$s_1 = \frac{y(t)}{\left(\ell_3 c_2 + \ell_2\right)}$$

$$\tan q_1 = \frac{s_1}{c_1} = \frac{y(t)}{\ell_3 c_2 + \ell_2} \frac{\ell_3 c_2 + \ell_2}{x(t)} = \frac{y(t)}{x(t)}$$

Cinematica diretta di velocità (1)

Velocità lineari

$$\dot{x}(t) = -(\ell_3 s_1 c_2 + \ell_2 s_1)\dot{q}_1(t) - \ell_3 c_1 s_2 \dot{q}_2(t)$$

$$\dot{y}(t) = (\ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1)\dot{q}_1(t) - \ell_3 s_1 s_2 \dot{q}_2(t)$$

$$\dot{z}(t) = \ell_3 c_2 \dot{q}_2(t)$$

Velocità angolari: approccio analitico

$$\left.\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= \dot{q}_1(t) \\ \dot{\theta}(t) &= 0 \\ \dot{\psi}(t) &= \dot{q}_2(t) \end{aligned}\right\}$$

Queste potremmo definirle *velocità euleriane*

$$\boldsymbol{\omega}_E = \begin{pmatrix} \dot{q}_1(t) \\ 0 \\ \dot{q}_2(t) \end{pmatrix}$$

Cinematica diretta di velocità (2)

Jacobiano analitico (per derivazione)

$$\boldsymbol{J}_L = \begin{pmatrix} -\ell_3 s_1 c_2 - \ell_2 s_1 & -\ell_3 c_1 s_2 \\ \ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1 & -\ell_3 s_1 s_2 \\ 0 & \ell_3 c_2 \end{pmatrix}$$

Eq. 2a

$$\boldsymbol{J}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eq. 2b

Velocità euleriane -> velocità cartesiane

Matrice di trasformazione

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$\boldsymbol{M}_E = \begin{pmatrix} 0 & \cos\phi & \sin\phi\sin\theta \\ 0 & \sin\phi & -\cos\phi\sin\theta \\ 1 & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & s_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega = \boldsymbol{M}_E \omega_E = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & s_1 \\ 0 & s_1 & -c_1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ 0 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1\dot{q}_2 \\ -c_1\dot{q}_2 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix}$$

Velocità cartesiana

Velocità cartesiana nel riferimento base

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} s_1\dot{q}_2 \\ -c_1\dot{q}_1 \\ \dot{q}_1 \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{J}_A = \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & -c_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Eq. 3

Questo è lo jacobiano angolare geometrico.
Vediamo di calcolarlo con l'altro metodo

Jacobiano angolare geometrico

I giunti sono entrambi rotoidali, quindi vedendo le relazioni a pag.92

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J}_{Ai} &= \boldsymbol{k}_{i-1} \\
\boldsymbol{J}_{Li} &= \boldsymbol{k}_{i-1} \times \boldsymbol{r}_{i-1,p}
\end{aligned}
$$

Calcoliamo prima lo jacobiano angolare

$$
\boldsymbol{J}_{A1} = \boldsymbol{k}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{J}_{A2} = \boldsymbol{k}_1 = \boldsymbol{R}_1^0 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ -c_1 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Queste due colonne sono uguali a quelle ricavate in Eq. 3

Jacobiano lineare geometrico (1)

$$\boldsymbol{r}_{0,p} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$ che si ricava dalla cinematica diretta di posizione Eq. 1

$$\boldsymbol{J}_{L1} = \boldsymbol{k}_0 \times \boldsymbol{r}_{0,p} = \boldsymbol{S}(\boldsymbol{k}_0)\boldsymbol{r}_{0,p} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ell_3 s_1 c_2 - \ell_2 s_1 \\ \ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ROBOTICA – 01CFIDV 02CFICY

Jacobiano lineare geometrico (2)

poi calcoliamo

$$\boldsymbol{r}_{1,p} = \begin{pmatrix} \ell_3 c_2 \\ \ell_3 s_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1}$$

invece di trasformarlo subito nel rif. 0, e poi eseguire il prodotto vettoriale, eseguiamo prima il prodotto vettoriale in rif. 1
e poi lo trasformiamo in rif. 0

$$\begin{aligned} \left[\boldsymbol{J}_{L2}\right]_{R_1} &= \left[\boldsymbol{k}_1\right]_{R_1} \times \left[\boldsymbol{r}_{1,p}\right]_{R_1} = \left[\boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{k}_1\right)\boldsymbol{r}_{1,p}\right]_{R_1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_3 c_2 \\ \ell_3 s_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ell_3 s_2 \\ \ell_3 c_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} \end{aligned}$$

Jacobiano lineare geometrico (3)

ora trasformiamo da rif. 1 a rif. 0

$$[\boldsymbol{J}_{L2}]_{R_0} = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & -s_1 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\ell_3 s_2 \\ \ell_3 c_2 \\ 0 \end{pmatrix}_{R_1} = \begin{pmatrix} -\ell_3 c_1 s_2 \\ -\ell_3 s_1 s_2 \\ \ell_3 c_2 \end{pmatrix}_{R_0}$$

ora possiamo scrivere i due jacobiani

$$\boldsymbol{J}_L = \begin{pmatrix} \boldsymbol{J}_{L1} & \boldsymbol{J}_{L2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\ell_3 s_1 c_2 - \ell_2 s_1 & -\ell_3 c_1 s_2 \\ \ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1 & -\ell_3 s_1 s_2 \\ 0 & \ell_3 c_2 \end{pmatrix}$$

che coincide con il risultato di Eq. 2a

Jacobiano

possiamo affermare che i risultati per lo jacobiano lineare sono uguali indipendentemente dal metodo usato per calcolarlo

per lo jacobiano angolare, i risultati dipendono dalle convenzioni adottate per misurare l'assetto

riassumendo:

$$\boldsymbol{J}_L = \begin{pmatrix} -\ell_3 s_1 c_2 - \ell_2 s_1 & -\ell_3 c_1 s_2 \\ \ell_3 c_1 c_2 + \ell_2 c_1 & -\ell_3 s_1 s_2 \\ 0 & \ell_3 c_2 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{J}_A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{J}_A = \begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ 0 & -c_1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

jacobiano analitico — jacobiano geometrico